



3 Ciągi

Pojęcia ciągu używamy, mówiąc o kolejno ustawionych obiektach. Mogą to być obiekty matematyczne lub inne. W rozdziale tym omawiamy ciągi liczbowe, czyli takie, których kolejnymi wyrazami są liczby. Przykłady ciągów:

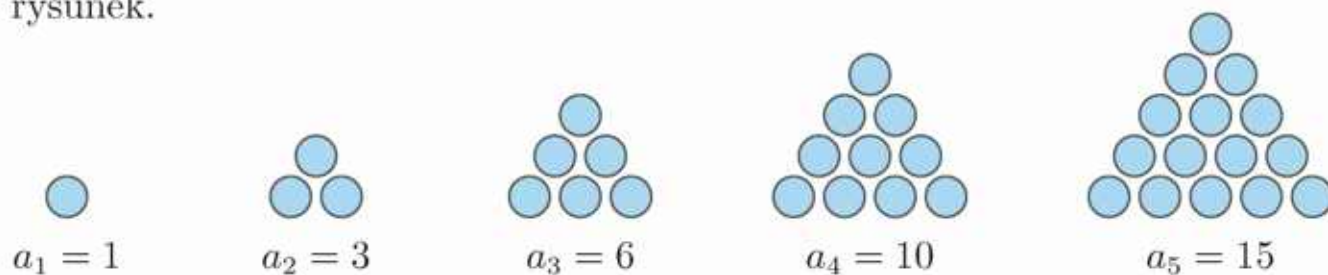
$1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ – ciąg kwadratów kolejnych liczb naturalnych dodatnich,

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$ – ciąg odwrotności kolejnych liczb pierwszych,

$1, 4, 1, 41, 1, 414, 1, 4142, 1, 41421, 1, 414214, 1, 4142136, \dots$ – ciąg kolejnych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$.

3.1. Pojęcie ciągu

Liczby: 1, 3, 6, 10, 15, ... to kolejne liczby trójkątne – nazwę wyjaśnia poniższy rysunek.



Mówimy, że liczby trójkątne tworzą **ciąg**. Ciąg jest określony, jeśli kolejnym liczbom naturalnym dodatnim przyporządkowano wartości: $a_1, a_2, a_3, \dots$, które nazywamy **wyrazami ciągu**.

Przykład 1

W ciągu: 1, 4, 9, 16, ... wyrazy są kwadratami kolejnych liczb naturalnych dodatnich. Na przykład wyraz $a_9 = 9^2 = 81$, $a_{10} = 10^2 = 100$.

Ogólnie, n -ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = n^2$.

Ćwiczenie 1

Odgadnij regułę, według której mogły powstać wyrazy danego ciągu, i podaj wyrazy a_9 oraz a_{10} tego ciągu.

a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

c) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$

d) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$

Definicja

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

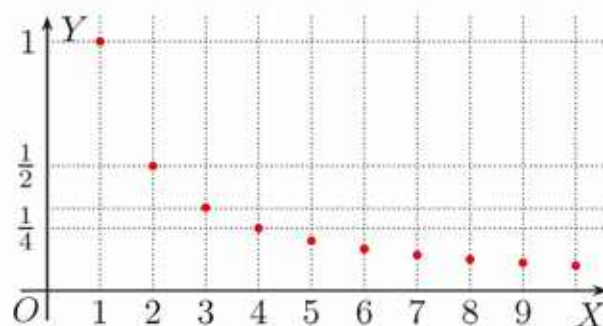
Czasem za dziedzinę ciągu przyjmowany jest zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbf{N}$.

Uwaga. Zamiast „ciąg nieskończony” będziemy pisać krótko: „ciąg”.

Kiedy mówimy o ciągach, używamy zwykle innych oznaczeń niż do opisu funkcji. I tak ciąg $a: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ oznaczamy (a_n) . Kolejne wartości funkcji a , czyli wyrazy ciągu: $a(1), a(2), a(3), \dots$, oznaczamy odpowiednio: $a_1, a_2, a_3, \dots$

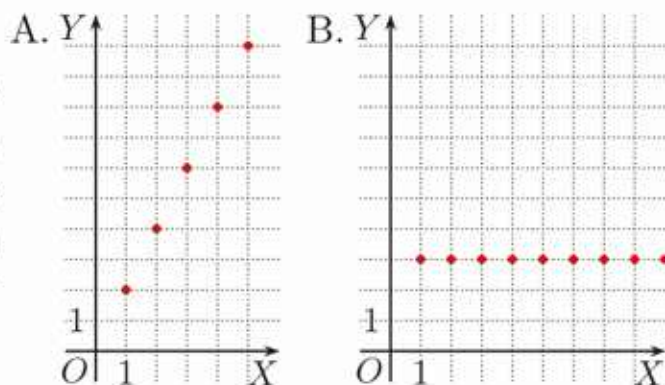
Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu odwrotności kolejnych liczb naturalnych dodatnich: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



Ćwiczenie 2

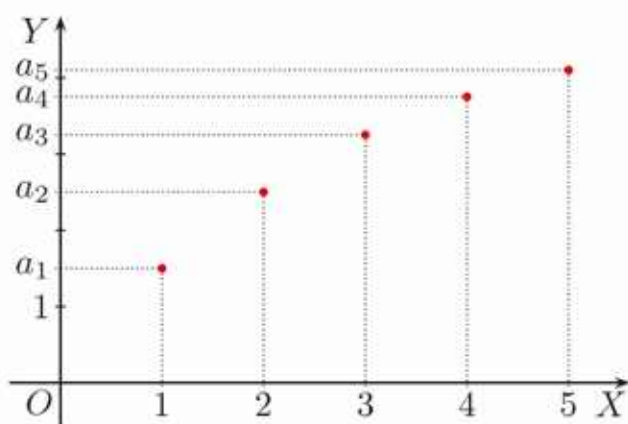
Na rysunku A przedstawiono wykres ciągu kolejnych liczb parzystych: 2, 4, 6, 8, 10, ..., a na rysunku B wykres ciągu stałego o wszystkich wyrazach równych 3. Podaj wyrazy siedemnasty oraz setny każdego z tych ciągów.



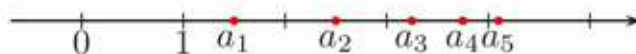
Ćwiczenie 3

Naszkluj wykres ciągu:

- połówek kolejnych liczb naturalnych: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
- kolejnych potęg liczby $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
- naprzemiennego: 2, -2, 2, -2, 2, -2, ...



Czasami, zamiast rysować wykres ciągu w układzie współrzędnych (rysunek obok), wyrazy ciągu będziemy zaznaczać na osi liczbowej (rysunek poniżej).



Ćwiczenie 4

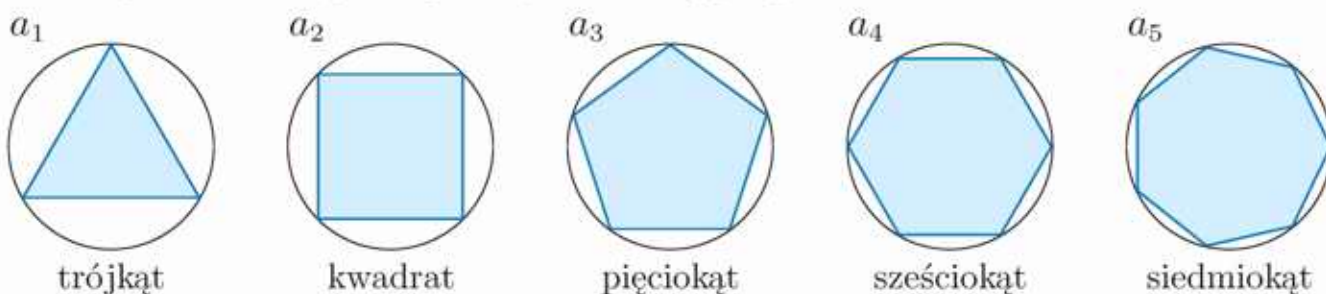
Zaznacz na osi liczbowej pięć początkowych wyrazów danego ciągu.

- $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{10}{2}, \frac{15}{2}, \dots$
- $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$
- $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

Większość ciągów przez nas rozpatrywanych to ciągi, których wyrazami są liczby – takie ciągi nazywamy **ciągami liczbowymi**. Oprócz ciągów liczbowych rozpatruje się również inne ciągi, np. ciąg prostych, ciąg wielokątów.

Przykład 3

Na poniższych rysunkach przedstawiono pięć początkowych wyrazów ciągu wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu 1.



Rozpatrujemy również **ciągi skończone**, czyli takie, których dziedziną jest zbiór skończony $\{1, 2, \dots, n\}$. Ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy **ciągiem n -wyrazowym**.

Przykład 4

W tabeli przedstawiono dwa różne ciągi siedmiowyrazowe: (a_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności następowania po sobie oraz (b_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności alfabetycznej.

Zwróć uwagę na to, że w przeciwieństwie do zbiorów kolejność wyrazów w ciągu ma znaczenie. Jeżeli zmienimy kolejność wyrazów w ciągu, to otrzymamy nowy ciąg.

n	(a_n)	(b_n)
1	poniedziałek	czwartek
2	wtorek	niedziela
3	środa	piątek
4	czwartek	poniedziałek
5	piątek	sobota
6	sobota	środa
7	niedziela	wtorek

Zadania

- Podaj wyrazy a_7 , a_8 , a_9 i a_{10} ciągu:
 - kolejnych liczb nieparzystych dodatnich: 1, 3, 5, 7, ...
 - odwrotności kolejnych liczb parzystych dodatnich: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, ...
 - kolejnych liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, ...

- Naszkiej wykres ciągu o wyrazach:

- | | |
|------------------------------------|--|
| a) $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$ | d) $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{6}, \dots$ |
| b) $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \dots$ | e) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$ |
| c) $-3, 3, -3, 3, -3, 3, \dots$ | f) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$ |

- Wyrazy $a_1, a_2, \dots, a_6$ ciągu są przybliżeniami dziesiętnymi liczby x , do pierwszego, drugiego, ..., szóstego miejsca po przecinku. Wypisz te wyrazy.

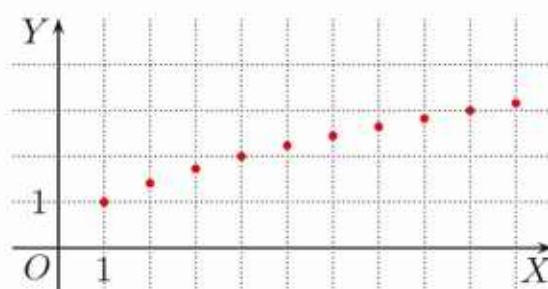
- a) $x = \sqrt{2}$ b) $x = \sqrt{3}$ c) $x = \pi$

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237309505$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73205080756887729$$

$$\pi \approx 3,14159265358979324$$

- Na rysunku przedstawiono wykres ciągu (a_n) o wyrazach: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$. Z wykresu możemy odczytać, że do przedziału $(1; 2)$ należą dwa wyrazy tego ciągu: $a_2 = \sqrt{2}$ i $a_3 = \sqrt{3}$. Ile wyrazów ciągu (a_n) należy do przedziału:



- a) $(2; 3)$, b) $(3; 4)$, c) $(4; 5)$, d) $(11; 12)$?

3.2. Sposoby określania ciągu

Ciąg możemy opisać słownie, podając warunki, jakie spełniają jego wyrazy.

Przykład 1

a) Ciąg kolejnych cyfr występujących w rozwinięciu dziesiętnym liczby π .

Jest to ciąg: 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, ...

b) Ciąg kolejnych liczb pierwszych większych od 10.

Jest to ciąg: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

Ćwiczenie 1

Wypisz siedem początkowych wyrazów ciągu:

a) kolejnych liczb naturalnych, których pierwiastek jest liczbą niewymierną,

b) kolejnych liczb pierwszych większych od 30.

Innym sposobem określenia ciągu jest podanie wzoru na n -ty wyraz ciągu – taki wzór nazywamy **wzorem ogólnym ciągu** (zwanym też wzorem jawnym).

Przykład 2

a) Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, 3, 4, otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}$$

b) Oblicz dziesięć początkowych wyrazów ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, ..., 10, otrzymujemy:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) oraz wyraz a_{10} .

$$\text{a) } a_n = \frac{n^2}{n+1} \quad \text{b) } a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad \text{c) } a_n = \frac{-3}{n(n+2)} \quad \text{d) } a_n = n^3 - n^2$$

Ćwiczenie 3

Oblicz następujące wyrazy ciągu (a_n) : a_1 , a_2 , a_3 , a_4 i a_{10} .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_n = (-1)^{n+1} & \text{c) } a_n = (-1)^n \cdot n & \text{e) } a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1} \\ \text{b) } a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n & \text{d) } a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1} & \text{f) } a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \end{array}$$

Czasem na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu można odgadnąć regułę, według której mogły one powstać, co pozwala zaproponować wzór ogólny tego ciągu.

Przykład 3

Kolejne wyrazy ciągu	Przykładowy wzór ogólny ciągu
3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	$a_n = 2n + 1$
4, 7, 12, 19, 28, ...	$a_n = n^2 + 3$
-3, 3, -3, 3, -3, ...	$a_n = (-1)^n \cdot 3$

Ćwiczenie 4

Zaproponuj wzór na n -ty wyraz ciągu.

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... | e) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... |
| b) 0, 3, 8, 15, 24, 35, ... | f) $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{3}{26}$, $\frac{3}{37}$, ... |
| c) -1, 4, -9, 16, -25, 36, ... | g) $\frac{1}{1 \cdot 2}$, $\frac{1}{2 \cdot 3}$, $\frac{1}{3 \cdot 4}$, $\frac{1}{4 \cdot 5}$, $\frac{1}{5 \cdot 6}$, $\frac{1}{6 \cdot 7}$, ... |
| d) 3, -9, 27, -81, 243, ... | h) $\frac{1}{1 \cdot 4}$, $-\frac{1}{2 \cdot 5}$, $\frac{1}{3 \cdot 6}$, $-\frac{1}{4 \cdot 7}$, $\frac{1}{5 \cdot 8}$, ... |

Zauważmy, że na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu możemy podać różne wzory na n -ty wyraz ciągu.

Ćwiczenie 5

Trzy początkowe wyrazy ciągu (a_n) są równe: -1, 0 i 1. Oblicz wyrazy a_4 , a_5 i a_6 , jeśli:

- a) $a_n = n - 2$, b) $a_n = (n - 2)^3$, c) $a_n = -\cos(n - 1)\frac{\pi}{2}$.

Przykład 4

Które wyrazy ciągu określonego za pomocą wzoru $a_n = 25 - n^2$ są równe zeru?

$$25 - n^2 = 0$$

$$n = -5 \text{ lub } n = 5$$

Z założenia $n \in \mathbf{N}_+$, zatem jedynym wyrazem ciągu (a_n) równym zeru jest a_5 .

Ćwiczenie 6

Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru? Które wyrazy tego ciągu są dodatnie?

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) $a_n = 12 - 3n$ | c) $a_n = n^2 - 4$ |
| b) $a_n = 14 - 3n$ | d) $a_n = 40 - n^2$ |

Zadania

1. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

- a) $a_n = 4n - 2$ d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ g) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$
b) $a_n = 3n - n^2$ e) $a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$ h) $a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{2}$
c) $a_n = 2^n - n$ f) $a_n = (-1)^{n+1} + n$ i) $a_n = n^2 + (-n)^{n-1}$

2. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

- a) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$ c) $a_n = \begin{cases} 2n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{n}{n-1} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$
b) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$ d) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

3. Zaproponuj wzór ogólny ciągu.

- a) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}, \dots$ d) $2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \dots$
b) $\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 11}, \dots$ e) $\frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \dots$
c) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \dots$ f) $0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{1}{729}, \dots$

4. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?

- a) $a_n = n^2(n-3)$ c) $a_n = n^3 - 4n^2 + 4n$ e) $a_n = n^4 - 13n^2 + 36$
b) $a_n = \frac{n^2 - 4n + 3}{n+1}$ d) $a_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 4n}{2n^2 + 4}$ f) $a_n = \frac{(n^3 - 64)(64 - n^2)}{3n - 1}$

5. Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne?

- a) $a_n = n^2 - 5n - 10$ b) $a_n = n^2 - 11n + 10$ c) $a_n = 3n^2 - 10n + 8$

6. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe jeden?

- a) $a_n = n^2 - 2n - 14$ b) $a_n = \frac{n^2 - 6n + 15}{n+3}$ c) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

7. Dla jakich n wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od wyrazów ciągu (b_n) ?

- a) $a_n = n(n-5), b_n = \frac{n}{n+5}$ b) $a_n = 2n+6, b_n = (n^2-9)(n-5)$

8. Wyznacz wyrazy ciągu (a_n) , które są liczbami całkowitymi.

- a) $a_n = \frac{n+4}{n}$ b) $a_n = \frac{2n+8}{n+1}$ c) $a_n = \frac{36-n^2}{n^2}$

D 9. Uzasadnij, że wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych.

- a) $a_n = 2n^2 - n + 9, b_n = 6 - 8n$ b) $a_n = 4n^3, b_n = 4n^2 - n$

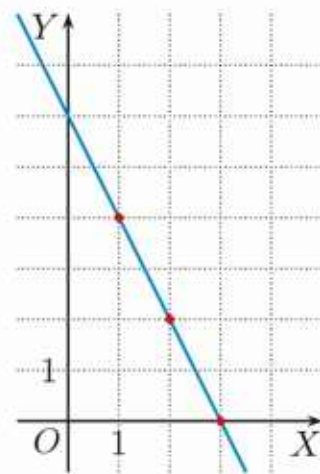
10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w wykresie funkcji liniowej przedstawionym na rysunku obok. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Punkty $(1, 4)$ i $(3, 0)$ należą do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$$

i otrzymujemy $a = -2$ i $b = 6$. Zatem $y = -2x + 6$, czyli wzór ogólny ciągu ma postać $a_n = -2n + 6$.



Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , jeśli jego wykres zawiera się w prostej:

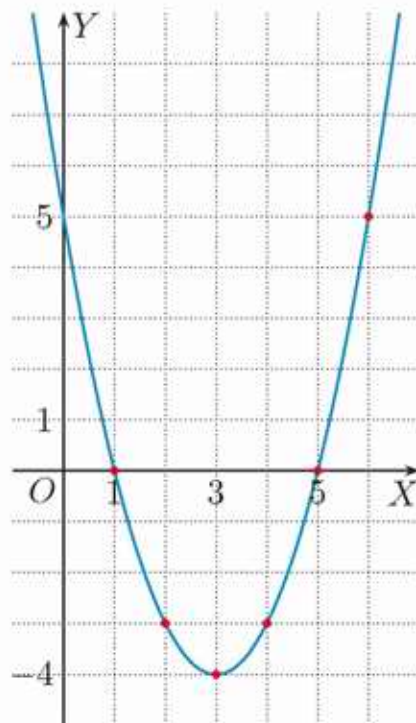
- przechodzącej przez punkty $(2, 2)$ i $(6, 0)$,
- równoległej do prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ oraz największy wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$,
- prostopadłej do prostej $y = 3x$ oraz $a_6 = 7$.

11. a) Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przedstawionej na rysunku obok. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

b) Które wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n \leq 12$?

12. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez początek układu współrzędnych i mającej wierzchołek w punkcie $(2, 8)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

13. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez punkty $(0, 0)$, $(2, 1)$ i $(4, 4)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_6 , a_{10} i a_{20} .



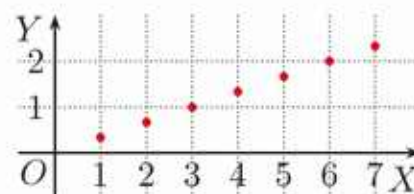
14. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w pewnej paraboli. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego ósmy wyraz, jeśli wiadomo, że:

- wierzchołek tej paraboli ma współrzędne $(3, 9)$ oraz $a_1 = 5$,
- parabola ta przecina oś OX w punktach $(-2, 0)$ i $(4, 0)$ oraz $a_6 = 8$,
- parabola ta przecina oś OY w punkcie $(0, -4)$ oraz $a_2 = 4$, $a_3 = 11$.

3.3. Ciągi monotoniczne (1)

Przykład 1

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{3}$ (wykres obok) to: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

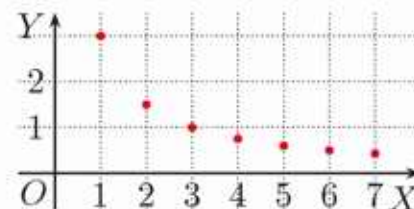


Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami rosnącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n > 0$).

Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest rosnący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m > a_n$.

Przykład 2

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{3}{n}$ (wykres obok) to: $\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest malejący.



Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami malejącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} < a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n < 0$).

Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest malejący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m < a_n$.

Ćwiczenie 1

Podaj przykład ciągu:

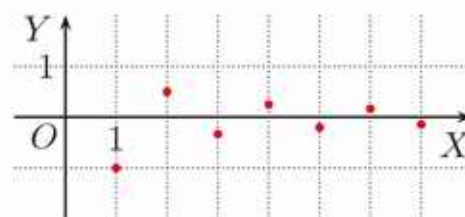
- malejącego o wszystkich wyrazach większych od 10,
- rosnącego o wszystkich wyrazach ujemnych.

Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ (wykres obok) nie jest ani rosnący, ani malejący.

Kolejne wyrazy ciągu (a_n) to:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$



Aby stwierdzić, że ciąg ten nie jest ani rosnący, ani malejący, wystarczy zauważyć, że na przykład drugi wyraz jest większy od pierwszego ($a_2 > a_1$), natomiast trzeci wyraz jest mniejszy od drugiego ($a_3 < a_2$).

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest monotoniczny.

a) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$

b) $-1, -1\frac{1}{2}, -2, -2\frac{1}{2}, -\sqrt{5}, -3, -3\frac{1}{2}, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg monotoniczny?

a) $a_n = (n-3)^2$

b) $a_n = -n^2 + 4n$

c) $a_n = n^2 - 7n + 5$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest monotoniczny, nie wystarczy obliczenie kilku jego początkowych wyrazów. Należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ dla dowolnego $n \in \mathbf{N}_+$.

Przykład 4

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n}{n+3}$. Wyznacz wyraz a_{n+1} .

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+3} = \frac{2n+2}{n+4}$$

Wyraz a_{n+1} otrzymujemy, wstawiając we wzorze ogólnym $n+1$ w miejsce n .

Ćwiczenie 4

Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{n}{2n+1}$

b) $a_n = \frac{-2n}{3n-2}$

c) $a_n = \frac{n-3}{n^2+1}$

d) $a_n = \frac{n^2-1}{2n-5}$

D Przykład 5

Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest rosnący.

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Wyznaczamy wyraz a_{n+1} .

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Zauważmy, że $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

D Ćwiczenie 5

Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący.

a) $a_n = n^2 - n$

b) $a_n = \frac{n}{n+4}$

c) $a_n = \frac{2n-2}{2n+1}$

d) $a_n = \frac{4n+1}{3n+1}$

D Ćwiczenie 6

Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.

a) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

b) $a_n = \frac{4n+2}{5n-1}$

c) $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$

d) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

Ciągami monotonicznymi, oprócz ciągów rosnących i ciągów malejących, są ciągi stałe, ciągi niemalejące i ciągi nierosnące.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **niemalejącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \geq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \geq 0$).

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **nierosnącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \leq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \leq 0$).

Uwaga. Każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym, a każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym.

Ćwiczenie 7

Jakie liczby można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać ciąg niemalejący?

a) 1, 2, 3, 4, $?$, $?$, 4, 5, 6, ...

b) 1, $\frac{3}{2}$, $?$, 2, $?$, $?$, 3, 3, 3, ...

Ćwiczenie 8

Wypisz osiem początkowych wyrazów dowolnego nierosnącego ciągu (a_n) , dla którego: a) $a_2 = a_3 = 2$, $a_5 = 1$, b) $a_4 = a_6 = -1$, $a_7 = -2$.

Zadania

1. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu o podanym wzorze ogólnym.

- | | | | |
|---------------------|---------------------------|------------------------------|----------------------------------|
| a) $a_n = n^2 - 1$ | c) $a_n = \frac{3+n}{n}$ | e) $a_n = \frac{3n-4}{2n+1}$ | g) $a_n = \frac{2n^2+3}{2n+6}$ |
| b) $a_n = 2n - n^2$ | d) $a_n = \frac{2n}{n+5}$ | f) $a_n = \frac{2-3n}{4n-5}$ | h) $a_n = \frac{4-2n^2}{2n^2-1}$ |

$\square$ 2. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- | | | | |
|---------------------|--------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $a_n = n^2 - 2n$ | b) $a_n = 1 - n^2$ | c) $a_n = 3 + \frac{7}{n}$ | d) $a_n = \frac{2-4n^2}{n^2}$ |
|---------------------|--------------------|----------------------------|-------------------------------|

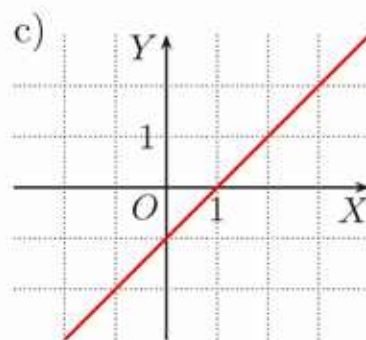
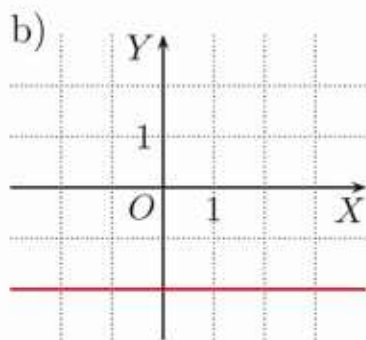
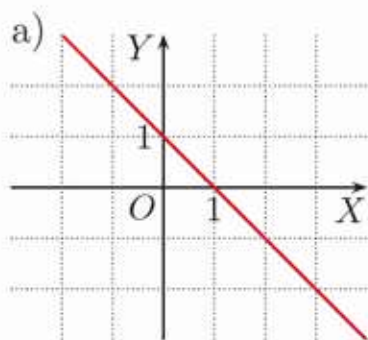
$\square$ 3. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- | | | | |
|----------------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| a) $a_n = \frac{1-n}{n+1}$ | c) $a_n = \frac{n}{2n-1}$ | e) $a_n = \frac{2n-4}{3n+5}$ | g) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$ |
| b) $a_n = \frac{3n}{n+2}$ | d) $a_n = \frac{3n+2}{4n+1}$ | f) $a_n = \frac{2-3n}{3-4n}$ | h) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ |

$\square$ 4. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Uzasadnij, że ten ciąg nie jest monotoniczny.

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------|---------------------------|
| a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ | c) $a_n = n - 4 $ | e) $a_n = (n - 1)(n - 3)$ |
| b) $a_n = 4 - \frac{(-1)^n}{n}$ | d) $a_n = n^2 - 4 $ | f) $a_n = 8n - n^2$ |

5. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej przedstawionej na rysunku. Określ monotoniczność tego ciągu.



6. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej $y = (k-1)x$. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest: a) malejący, b) rosnący, c) stały?
7. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rosnący?
a) $a_n = (2k-3)n-6$ b) $a_n = (k^2-1)n+4$ c) $a_n = (3-k^2)n$
8. Dla jakich wartości parametru t ciąg (a_n) jest nierosnący, a dla jakich niemalejący?
a) $a_n = (3-\frac{1}{3}t)n+2$ b) $a_n = (t^2-9)(n+1)$ c) $a_n = -n(t^2-2t)$
9. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest malejący?
a) $a_n = \frac{k^2+1}{k}n$ b) $a_n = (1-\frac{1}{k})n+3$ c) $a_n = \frac{k}{k+1}n-2$
10. Dla jakich wartości parametru p ciąg (a_n) jest rosnący?
a) $a_n = n^2-np$ b) $a_n = \frac{pn}{n+1}$ c) $a_n = \frac{n+p}{n+2}$
11. a) Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = a_n^2$ jest rosnący.
b) Podaj przykład ciągu rosnącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = a_n^2$ jest malejący.
12. a) Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = |a_n|$ jest rosnący.
b) Podaj przykład ciągu rosnącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = |a_n|$ nie jest monotoniczny.
- D** 13. a) Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest rosnący, $c > 0$ i $d \in \mathbf{R}$, to ciąg określony za pomocą wzoru $b_n = c \cdot a_n + d$ jest rosnący.
b) Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest malejący, $c < 0$ i $d \in \mathbf{R}$, to ciąg określony za pomocą wzoru $b_n = c \cdot a_n + d$ jest rosnący.

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie

Ciąg (a_n) możemy określić, podając jego pierwszy wyraz a_1 (lub kilka początkowych wyrazów) oraz wzór na wyraz a_{n+1} , wyrażony za pomocą poprzedniego wyrazu (lub kilku poprzednich). Taki sposób określenia ciągu nazywamy **rekurencyjnym**.

Przykład 1

Oblicz wyrazy a_2 , a_3 i a_4 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Podstawiamy za n kolejno: 1, 2, 3 i otrzymujemy:

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$a_4 = a_3^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$$

Ćwiczenie 1

Poniżej podano rekurencyjne określenie ciągu (a_n) i obliczono wyrazy a_2 i a_3 . Oblicz wyrazy a_4 , a_5 i a_6 .

a)	$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$a_2 = a_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$ $a_3 = a_2^2 - 1 = 0 - 1 = -1$
b)	$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
c)	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$a_2 = 2a_1 + (-1)^1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ $a_3 = 2a_2 + (-1)^2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

Ćwiczenie 2

Oblicz wyrazy $a_2, a_3, \dots, a_6$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{64} \\ a_{n+1} = 2^n \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

Przykład 2

Oblicz wyrazy $a_3, a_4, \dots, a_{10}$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (z wyjątkiem pierwszego i drugiego) jest sumą dwóch poprzednich wyrazów. Jego dziesięć początkowych wyrazów to:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

Ciąg ten znany jest jako **ciąg Fibonacciego** [czyt. fibonacczego].

Czy wiesz, że...

Leonardo z Pizy (ok. 1180–1250), znany jako Fibonacci, jest uważany za najwybitniejszego matematyka średnio-wiecznej Europy. Podróżując po krajach Wschodu, zapoznał się z osiągnięciami matematyki arabskiej i hinduskiej. W swoim dziele *Liber abaci* z 1202 roku dokonał podsumowania stanu ówczesnej wiedzy matematycznej.



Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_3, a_4, a_5 i a_6 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

- a) $\begin{cases} a_1 = 0, & a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_{n-1} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2, & a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - n & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

D Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - n^2 & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$ i określamy jej znak:

$a_{n+1} - a_n = a_n - n^2 - a_n = -n^2 < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest malejący.

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n + 4n^2 - 1 & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = n^2 \cdot a_n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^n} & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} \cdot a_n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

Podanie wzoru ogólnego ciągu, który jest określony rekurencyjnie, może być trudne. Natomiast jeśli znamy wzór ogólny ciągu, to ciąg ten możemy zdefiniować rekurencyjnie.

Przykład 4

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n(n+1)$. Określ ten ciąg rekurencyjnie.

Wyznaczamy wyrazy: $a_1 = 1 \cdot 2 = 2$ oraz $a_{n+1} = (n+1)(n+2)$.

- Ciąg możemy określić rekurencyjnie na podstawie różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)(n+2) - n(n+1) = 2n+2$$

Stąd otrzymujemy rekurencyjne określenie ciągu (a_n) :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

- Rekurencyjne określenie ciągu możemy również wyznaczyć na podstawie ilorazu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n}$$

Stąd otrzymujemy inne rekurencyjne określenie ciągu (a_n) :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Określ rekurencyjnie ciąg (a_n) na dwa sposoby. Skorzystaj najpierw z różnicy $a_{n+1} - a_n$, a następnie z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\text{a) } a_n = 2n + 1 \qquad \text{c) } a_n = 2 \cdot 3^n \qquad \text{e) } a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{b) } a_n = n^2 + 1 \qquad \text{d) } a_n = (-1)^n \qquad \text{f) } a_n = \sqrt{n+1}$$

Zadania

1. Oblicz wyrazy a_2 , a_3 , a_4 i a_5 ciągu (a_n) . Ile liczb dodatnich jest wśród dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu?

$$\text{a) } \begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n - 2^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + (n-1)^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (-2)^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \left(a_n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n - n^2 + 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = (-1)^n a_n + n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

2. Ile jest liczb ujemnych wśród sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) ?

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - n^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 4a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = 2 - na_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - na_n - 4, \quad n \geq 1 \end{cases}$

3. Oblicz wyraz a_5 ciągu (a_n) .

a) $\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \\ a_{n+2} = (-1)^n a_n - a_{n+1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 32, \quad a_2 = 64 \\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

4. Oblicz x , jeśli $a_2 + a_5 = 9$. Czy ciąg (a_n) jest monotoniczny?

a) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = a_n - n^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

5. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu określone są za pomocą wzoru $a_{n+1} = a_n^2 + na_n$. Którą z liczb: $-2, -1, 0, 1, 2$ należy wybrać jako a_1 , aby:

a) $a_3 = 0$,

b) $a_3 = 8$?

D 6. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu określone są za pomocą wzoru:

a) $a_{n+1} = a_n^2 - na_n$,

b) $a_{n+1} = a_n^2 - (n+1)a_n$.

Wykaż, że niezależnie od tego, którą z liczb: $-1, 1, 2$ przyjmujemy za a_1 , otrzymamy tę samą wartość wyrazu a_4 .

7. Ciąg (a_n) jest określony za pomocą wzoru $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$ dla $n \geq 1$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu, jeśli:

a) $a_2 = -\frac{1}{2}$,

b) $a_2 = \frac{3}{2}$,

c) $a_3 = 1$,

d) $a_4 = 1\frac{1}{4}$.

Czy wiesz, że...

Rekurencji używa się do definiowania niektórych pojęć matematycznych. Jednym z przykładów jest $n!$ (n **silnia**). Dla $n > 1$ symbol $n!$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Przyjmuje się również, że $0! = 1$ oraz $1! = 1$.

Rekurencyjna definicja $n!$:

$$\begin{cases} 0! = 1, \quad 1! = 1 \\ (n+1)! = n!(n+1) \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Ciąg Fibonacciego

Pierwsze dwa wyrazy ciągu Fibonacciego są równe 1, a każdy następny wyraz jest sumą dwóch poprzednich wyrazów.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 ...

Złota liczba a ciąg Fibonacciego

Niech ciąg (f_n) będzie ciągiem Fibonacciego. Rozpatrzmy kolejne ilorazy $\frac{f_{n+1}}{f_n}$.

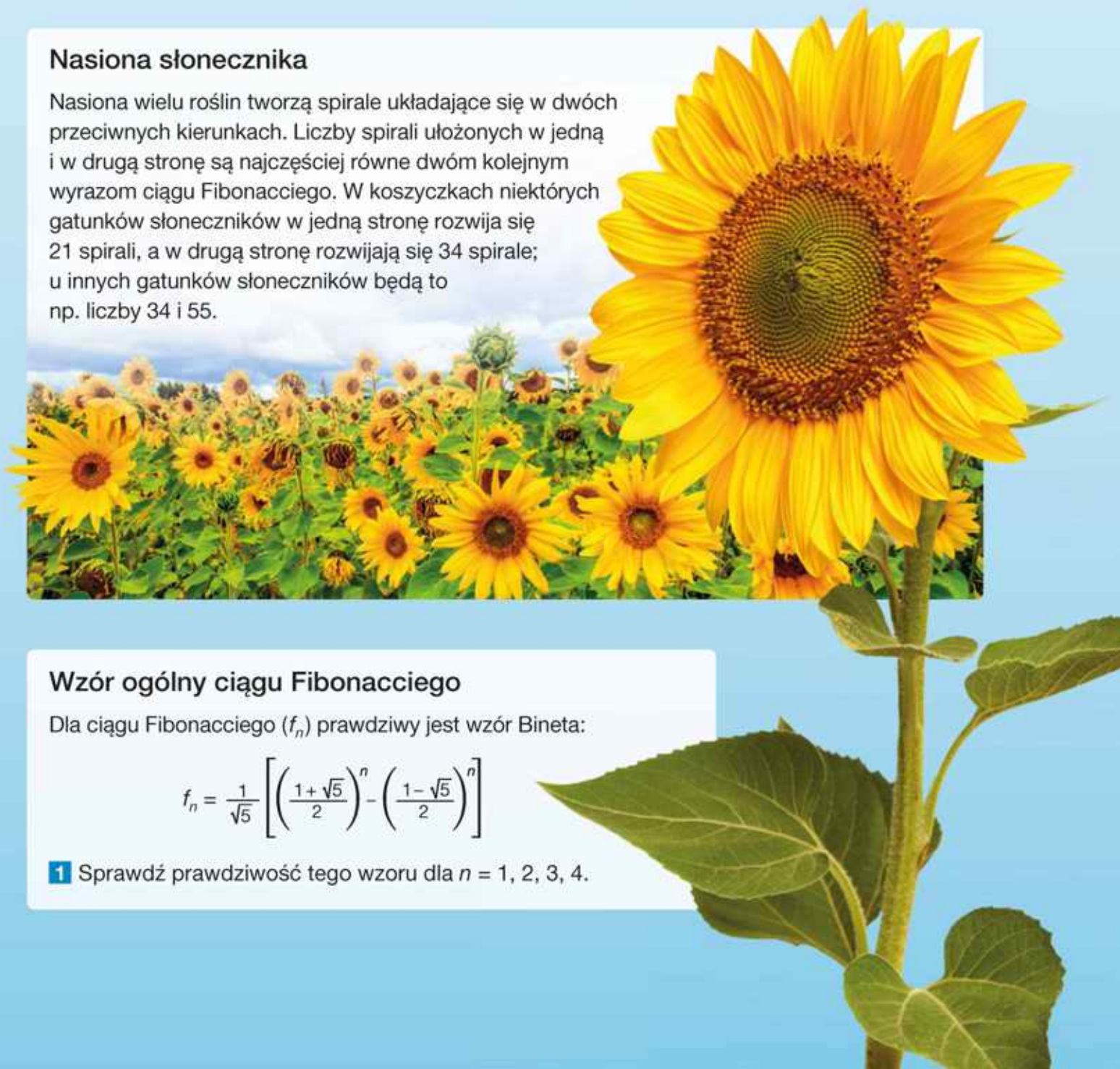
$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{5}{3} = 1,6; \quad \frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{13}{8} = 1,625; \quad \frac{21}{13} = 1,61538...$$

Wartości tych ułamków są coraz bliższe złotej liczbie:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$$

Nasiona słonecznika

Nasiona wielu roślin tworzą spirale układające się w dwóch przeciwnych kierunkach. Liczby spirali ułożonych w jedną i w drugą stronę są najczęściej równe dwóm kolejnym wyrazom ciągu Fibonacciego. W koszyczkach niektórych gatunków słoneczników w jedną stronę rozwija się 21 spirali, a w drugą stronę rozwijają się 34 spirale; u innych gatunków słoneczników będą to np. liczby 34 i 55.



Wzór ogólny ciągu Fibonacciego

Dla ciągu Fibonacciego (f_n) prawdziwy jest wzór Bineta:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

1 Sprawdź prawdziwość tego wzoru dla $n = 1, 2, 3, 4$.

*3.5. Ciągi monotoniczne (2)

Definicja

Ciąg (c_n) nazywamy **sumą** ciągów (a_n) i (b_n) , jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość $c_n = a_n + b_n$.

Podobnie definiujemy **różnicę** i **iloczyn** ciągów (a_n) i (b_n) oraz ich **iloraz** $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ przy założeniu, że $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

Ćwiczenie 1

Dane są ciągi $a_n = n - 1$ i $b_n = n + 1$. Podaj wzór ogólny ciągu (c_n) oraz oblicz jego cztery początkowe wyrazy.

a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n - b_n$ c) $c_n = a_n \cdot b_n$ d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

D Ćwiczenie 2

Dane są ciągi $a_n = n^2$ i $b_n = \frac{12}{n}$. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (c_n) . Czy jest to ciąg monotoniczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n - b_n$ c) $c_n = a_n \cdot b_n$ d) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

D Przykład 1

Dane są ciągi rosnące (a_n) i (b_n) . Uzasadnij, że ciąg (c_n) będący sumą ciągów (a_n) i (b_n) też jest rosnący.

Ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące, zatem $a_{n+1} - a_n > 0$ i $b_{n+1} - b_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$. Wyznaczamy różnicę $c_{n+1} - c_n$:

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n)$$

Zatem $c_{n+1} - c_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, czyli ciąg (c_n) jest rosnący.

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że suma ciągów malejących jest ciągiem malejącym.

Ćwiczenie 4

Podaj przykład takich ciągów rosnących (a_n) i (b_n) , że ciąg (c_n) określony za pomocą wzoru $c_n = a_n \cdot b_n$:

a) jest stały, b) jest malejący, c) nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 5

Podaj przykład takich ciągów rosnących (a_n) i (b_n) , że ciąg (c_n) określony za pomocą wzoru $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ jest: a) rosnący, b) malejący.

Zadania

1. Dane są ciągi $a_n = \frac{n-1}{n}$ i $b_n = \frac{4n-1}{n}$. Zbadaj monotoniczność ciągu:

- a) $(a_n + b_n)$, b) $(a_n - b_n)$, c) $(a_n \cdot b_n)$, d) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$.

D 2. Uzasadnij, że jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące, to ciąg (c_n) też jest rosnący.

- a) $c_n = 2a_n + 3b_n$ b) $c_n = 2^{a_n+b_n}$

D 3. Zbadaj monotoniczność ciągów $a_n = \frac{4n+5}{n+2}$ i $b_n = n^4$. Uzasadnij, że ciąg $c_n = a_n \cdot b_n$ jest rosnący.

D 4. Uzasadnij, że ciągi $a_n = n^2 - n - 6$ i $b_n = n^4$ są rosnące, a ciąg $c_n = a_n \cdot b_n$ nie jest monotoniczny.

D 5. Uzasadnij, że ciągi $a_n = 2^{-2n+1}$ i $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ są malejące. Zbadaj monotoniczność ciągów $c_n = a_n \cdot b_n$ i $d_n = \frac{a_n}{b_n}$.

6. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$ ciąg (a_n) jest rosnący?

- a) $a_n = n \sin \alpha - 3$ b) $a_n = -n(\cos \alpha + \frac{1}{2})$

7. Dane są ciągi $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ i $b_n = \cos \frac{n\pi}{2}$. Zbadaj monotoniczność ciągu:

- a) $a_n + b_n$, b) $a_n - b_n$, c) $n + a_n$, d) $2n - b_n$.

8. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rosnący?

- a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{2k-1}{k+1}a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = (nk+2)a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Naszkiej wykres ciągu $a_n = \left[\frac{n}{2}\right]$. Czy jest to ciąg monotoniczny?

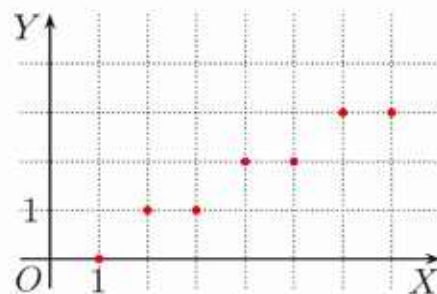
Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x .

Zatem:

$$a_1 = \left[\frac{1}{2}\right] = 0, \quad a_2 = [1] = 1, \quad a_3 = \left[\frac{3}{2}\right] = 1,$$

$$a_4 = [2] = 2, \quad a_5 = \left[\frac{5}{2}\right] = 2, \quad \dots$$

Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa 0 lub 1. Zatem ciąg (a_n) jest niemalejący.



Naszkiej wykres ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg monotoniczny?

- a) $a_n = \left[\frac{n}{4}\right]$ b) $a_n = -\left[\frac{n}{4}\right]$ c) $a_n = \left[\frac{n-4}{4}\right]$

3.6. Ciąg arytmetyczny (1)

Przykład 1

Pani Jola postanowiła kupić sprzęt narciarski za 2100 zł. W tym celu w pierwszym miesiącu odłożyła 450 zł, a w każdym następnym odkładała po 150 zł. W tabeli podano stan oszczędności pani Joli w kolejnych miesiącach.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	1650	1800	1950	2100

Zauważ, że każda z wymienionych w tabeli kwot (oprócz pierwszej) jest większa od poprzedniej o tę samą stałą wartość. Wymienione liczby stanowią przykład ciągu arytmetycznego.

Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciąg arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 1

Podaj różnicę ciągu arytmetycznego i wypisz jego dwa następne wyrazy.

a) $3, 12, 21, \dots$

b) $1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, 3, \dots$

c) $7, 3, -1, \dots$

Przykład 2

Oblicz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli $a_1 = 6$ oraz $r = 5$.

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 6 + 5 = 11$$

$$a_3 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$$

$$a_4 = 6 + 3 \cdot 5 = 21$$

$\vdots$

$$a_{11} = 6 + 10 \cdot 5 = 56$$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu arytmetycznego, obliczamy $a_1 + (11 - 1)r$.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, to korzystając ze wzoru ogólnego tego ciągu, możemy obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład 3

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego: 1, 11, 21, 31, 41, ... Oblicz trzydziesty wyraz tego ciągu.

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = a_2 - a_1 = 11 - 1 = 10$, zatem wzór ogólny ma postać $a_n = a_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1) \cdot 10 = 10n - 9$. Obliczamy trzydziesty wyraz: $a_{30} = 10 \cdot 30 - 9 = 291$.

Ćwiczenie 2

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

- a) 2, 4, 6, 8, 10, ... b) $4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6, \dots$ c) 3, 2, 1, 0, -1, -2, ...

Ćwiczenie 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, w którym:

- a) $a_1 = 4, a_4 = 10$, b) $a_1 = -5, a_6 = 20$, c) $a_1 = 5, a_{10} = 2\frac{3}{4}$.

Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest:

- **rosnący**, gdy $r > 0$, ■ **malejący**, gdy $r < 0$, ■ **stały**, gdy $r = 0$.

Ćwiczenie 4

Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego i określ jego monotoniczność. Wyznacz wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

- a) 9, 3, -3, -9, -15, -21, ... b) $1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 4, \dots$ c) 2, 2, 2, 2, ...

Ćwiczenie 5

Dla jakiej wartości parametru k liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, gdy:
$$b - a = c - b$$

- a) $a = 3, b = k + 1, c = 3k - 6$ b) $a = 1, b = k^2, c = k^2 + 2k + 2$

Ćwiczenie 6

Dane są wyrazy a_1, a_2, a_3 ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wyrazy a_4 i a_5 . Określ monotoniczność tego ciągu w zależności od parametru m .

- a) $a_1 = 4, a_2 = m + 6, a_3 = 2m + 8$ c) $a_1 = 1, a_2 = m^2, a_3 = 2m^2 - 1$
b) $a_1 = \frac{1}{2}m, a_2 = m - 3, a_3 = \frac{3}{2}m - 6$ d) $a_1 = m^2, a_2 = m, a_3 = 2m - m^2$

Przykład 4

Jaką liczbę należy wstawić między liczby a i b , aby otrzymany w ten sposób ciąg był arytmetyczny?

Oznaczmy szukaną liczbę przez x . Wówczas:

$$\begin{aligned}x - a &= b - x \\ x &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

Szukaną liczbą jest więc **średnia arytmetyczna** liczb a i b . Otrzymujemy zatem ciąg: $a, \frac{a+b}{2}, b$.

W ciągu arytmetycznym (a_n) każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

Dowód

Dla $n \geq 2$ wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r możemy zapisać w postaci: $a_{n-1} = a_n - r$ i $a_{n+1} = a_n + r$. Zatem:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - r + a_n + r}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

Ćwiczenie 7

Oblicz x , jeśli podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny.

a) $9, x, 37$

b) $4, x, -8$

c) $\frac{1}{2}, x, \frac{1}{3}$

Zadania

1. Oblicz n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r . Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_1 = -5, r = 3, n = 14$

c) $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}, n = 20$

b) $a_1 = 4, r = -4, n = 11$

d) $a_1 = -2, r = 0,1, n = 35$

2. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $a_1 = 6, a_3 = 20$

b) $a_1 = -4, a_4 = 5$

c) $a_1 = 9, a_6 = 6\frac{1}{2}$

3. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .

a) $r = 2, a_3 = 5$

b) $r = -3, a_5 = 0$

c) $r = \frac{1}{2}, a_7 = -4$

4. Wyznacz liczby:

a) a, b tak, aby ciąg: $1, a, b, 10$ był arytmetyczny,

b) a, b, c tak, aby ciąg: $2, a, b, c, 100$ był arytmetyczny.

5. Wstaw między liczby 1 i 25:

- a) pięć liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny,
- b) siedem liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny.

6. W wieku od 3 do 10 lat dzieci zwykle rosną w stałym tempie. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, jeśli wiadomo, że wzrost pewnego dziecka w kolejnych latach tworzy ciąg arytmetyczny.

Wiek [lata]	3	4	5	6	7	8	9	10
Wzrost [cm]	98	?	?	117,5	?	?	?	?

7. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz a_{12} .

- a) $\begin{cases} a_6 = 20 \\ a_{10} = 4 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_3 = -9 \\ a_{15} = -3 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} a_5 = 4 \\ a_{21} = 8 \end{cases}$

8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki.

- a) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 22 \\ \frac{a_1}{a_5} = 21 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} a_2^2 + a_4^2 = 16 \\ a_3 + a_5 = 8 \end{cases}$
- e) $\begin{cases} \frac{a_5}{a_1} = -1 \\ a_2 \cdot a_7 = -1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 11 \\ a_7 - a_3 = 20 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} a_3 + a_5 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 6 \end{cases}$
- f) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_3 = \frac{5}{a_4} + 2 \end{cases}$

9. Oblicz x , jeśli wiadomo, że podane liczby są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego.

- a) $-2, 2 + x, 4 + x^2$
- b) $2x - 3, 3x - 5, \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

10. Suma drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 2, a różnica szóstego i trzeciego wyrazu jest równa 9. Który wyraz tego ciągu jest równy 40?

11. Wyznacz cztery liczby tworzące ciąg arytmetyczny, jeśli wiadomo, że różnica tego ciągu jest równa 1, a iloczyn jego trzech ostatnich wyrazów jest równy -60 .

12. Trzeci, piąty i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) są równe odpowiednio 4, 10 i 40. Oblicz a_1 i wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.

13. Wyznacz cztery liczby tworzące ciąg arytmetyczny, jeśli wiadomo, że:

- a) suma dwóch pierwszych liczb jest równa 4, a suma dwóch ostatnich jest równa -28 ,

*b) jego różnica jest równa 2, a iloczyn wszystkich liczb jest równy -15 .

3.7. Ciąg arytmetyczny (2)

Przykład 1

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg arytmetyczny?

a) $a_n = n^2 + n + 1$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$$

$$a_4 = 4^2 + 4 + 1 = 21$$

Aby pokazać, że ciąg nie jest arytmetyczny, wystarczy wskazać wyrazy a_k , a_{k+1} oraz a_n , a_{n+1} takie, że $a_{k+1} - a_k \neq a_{n+1} - a_n$.

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$ oraz $a_3 - a_2 = 13 - 7 = 6$, zatem $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

b) $a_n = (n - 2)^3 + 2$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = (1 - 2)^3 + 2 = 1$$

$$a_3 = (3 - 2)^3 + 2 = 3$$

$$a_2 = (2 - 2)^3 + 2 = 2$$

$$a_4 = (4 - 2)^3 + 2 = 10$$

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1$, ale $a_4 - a_3 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że ciąg o podanych początkowych wyrazach nie jest arytmetyczny.

a) 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, ...

b) $1, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, -5, -6\frac{1}{2}, \dots$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny, nie wystarczy sprawdzić różnicy między kilkoma początkowymi wyrazami tego ciągu. Należy sprawdzić, czy różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

Przykład 2

Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{3n+2}{2}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+2}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3n+5}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3}{2}$$

Różnica ta jest stała dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Ćwiczenie 2

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 6n - 2$

b) $a_n = \frac{2n-5}{3}$

c) $a_n = \sqrt{2}n$

d) $a_n = 13 - \frac{1}{10}n$

Przykład 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego:

$$-3, -1, 1, 3, 5, \dots$$

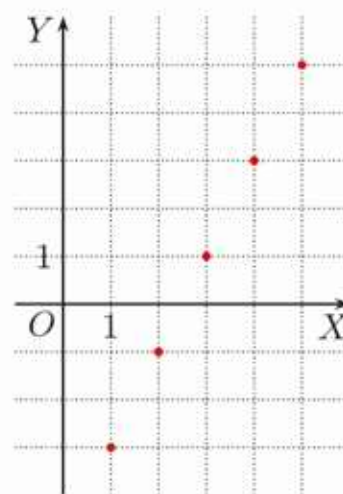
Narysuj wykres tego ciągu.

Różnica tego ciągu jest równa 2.

Wyznaczamy wzór ogólny:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r = -3 + (n-1) \cdot 2 = \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

Zauważmy, że wykres tego ciągu jest zawarty w prostej $y = 2x - 5$.



Ćwiczenie 3

a) Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego: $6, 4, 2, 0, -2, \dots$ Naszkicuj wykres tego ciągu i podaj równanie prostej, w której się on zawiera.

b) Wykres ciągu arytmetycznego jest zawarty w prostej $y = 3x - 2$. Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu oraz jego wzór ogólny.

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres zawiera się w pewnej prostej $y = ax + b$.

Zadania

1. Dany jest ciąg $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n$.

a) Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

D b) Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

2. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = \frac{n+2}{6}$

c) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

e) $a_n = \frac{1}{2}(n-7)$

b) $a_n = \frac{\sqrt{5}n+1}{2}$

d) $a_n = \frac{9n^2-4}{3n+2}$

f) $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)(7-n)$

D 3. Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) też jest ciągiem arytmetycznym.

a) $b_n = 3a_n + 2$

b) $b_n = -2a_n + n$

c) $b_n = 6 - \frac{a_n + 2}{4}$

D 4. Wykaż, że jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są ciągami arytmetycznymi, to ciąg (c_n) też jest ciągiem arytmetycznym.

a) $c_n = 2a_n + 3b_n$

b) $c_n = 3a_n - 4b_n + \frac{n}{2}$

c) $c_n = \frac{4a_n - \sqrt{2}b_n}{3}$

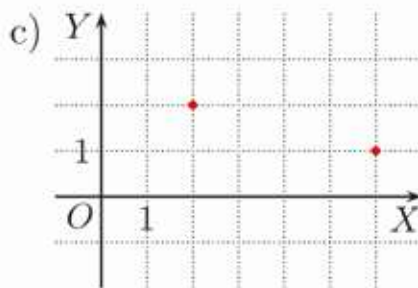
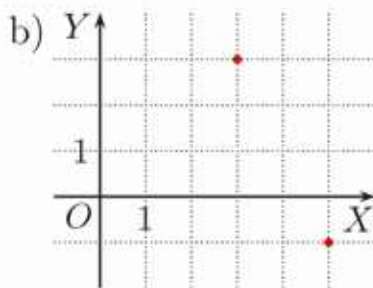
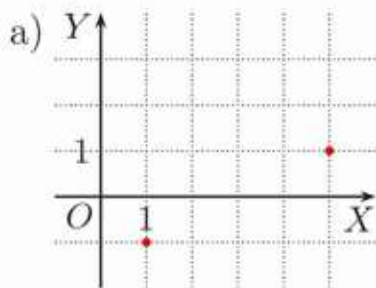
5. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w podanej prostej. Podaj wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego cztery początkowe wyrazy.

a) $y = 5x - 4$

b) $y = -3x + 1$

c) $y = \sqrt{3}x - 2$

6. Na rysunku przedstawiono dwa punkty należące do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Które wyrazy ciągu (a_n) są większe od zera?



- D** 7. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Uzasadnij, że jest on arytmetyczny i rosnący. Zapisz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego dziesiąty wyraz.

a) $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$

b) $\begin{cases} a_1 = 3\sqrt{2} \\ a_{n+1} = a_n + \sqrt{2} \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$

- D** 8. a) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Wykaż, że ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.

b) Wykaż, że dla dowolnej funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.

9. a) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Oblicz obwód tego trójkąta.

b) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości przyprostokątnych, jeżeli przeciwprostokątna ma długość 10.

- D** 10. a) Wykaż, że długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach 3, 4, 5.

b) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli jego obwód jest równy 18.

11. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest arytmetyczny i malejący?

a) $a_n = (k^2 + 2k - 1)n + 2$

b) $a_n = \frac{kn+2}{(k^2-1)n^2+2}$

12. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest arytmetyczny i rosnący?

a) $a_n = (2 \sin k + 1)n$

b) $a_n = n - 4n \cos^2 k$

3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) oznaczamy symbolem S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Przykład 1

Oblicz sumę S_{100} wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.

Zapisujemy sumę S_{100} na dwa sposoby i dodajemy równości stronami:

$$\begin{array}{r} S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 \\ S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_{100} = 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Zatem $2S_{100} = 101 \cdot 100$, czyli $S_{100} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) od 1 do 50,

b) od 1 do n .

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Dowód

Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r , to sumę jego n początkowych wyrazów możemy zapisać w postaci:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + \dots + (a_1 + (n-2)r) + (a_1 + (n-1)r)$$

oraz możemy zapisać sumowane wyrazy w odwrotnej kolejności:

$$S_n = (a_1 + (n-1)r) + (a_1 + (n-2)r) + \dots + (a_1 + r) + a_1$$

Dodajemy do siebie stronami powyższe równania i otrzymujemy:

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r) + \dots + (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r)$$

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)r) \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Przykład 2

Oblicz sumy S_5 i S_8 ciągu arytmetycznego: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

$$S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \frac{2+10}{2} \cdot 5 = 30$$

$$S_8 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = \frac{2+16}{2} \cdot 8 = 72$$

Ćwiczenie 2

a) Oblicz wyraz a_6 , a następnie sumę S_6 ciągu arytmetycznego: 1, 4, 7, 10, ...

b) Oblicz wyraz a_{20} , a następnie sumę S_{20} ciągu arytmetycznego: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

W obliczeniach wykorzystuje się również podaną niżej postać wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Przykład 3

Oblicz sumę S_{21} ciągu arytmetycznego: 3, 8, 13, 18, ...

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 5$, zatem:

$$S_{21} = \frac{2 \cdot 3 + (21-1) \cdot 5}{2} \cdot 21 = \frac{6+100}{2} \cdot 21 = 53 \cdot 21 = 1113$$

Ćwiczenie 3

a) Oblicz sumę S_{31} ciągu arytmetycznego: 3, 7, 11, ...

b) Oblicz sumę S_{13} ciągu arytmetycznego: -5, -8, -11, ...

Przykład 4

Uzasadnij wzór na sumę n początkowych liczb nieparzystych dodatnich:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 1$ oraz $a_n = 2n-1$. Zatem dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2$$

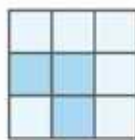
Na poniższych rysunkach przedstawiono ilustrację graficzną tego wzoru.



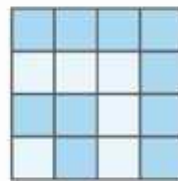
$$1 = 1^2$$



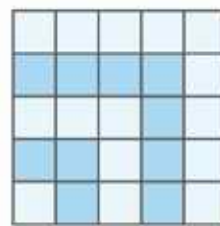
$$1 + 3 = 2^2$$



$$1 + 3 + 5 = 3^2$$



$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

D Przykład 5

Uzasadnij wzór $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{3n^2 - n}{2}$ dla $n \in \mathbf{N}_+$.

Podane składniki sumy tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 3$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i wyrazie $a_n = 3n - 2$. Zatem dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

$$S_n = \frac{1 + (3n - 2)}{2} \cdot n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbf{N}_+$.

$$\text{a) } n + 2n + 3n + \dots + n^2 = \frac{n^3 + n^2}{2} \qquad \text{b) } 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n^2 - n}{2}$$

Przykład 6

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1.

Liczyby, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1, mają postać $6n + 1$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Warunki zadania spełniają zatem liczby:

$$6 \cdot 0 + 1 = 1, \quad 6 \cdot 1 + 1 = 7, \quad 6 \cdot 2 + 1 = 13, \quad \dots, \quad 6 \cdot 16 + 1 = 97$$

Tworzą one 17-wyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 6$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ostatnim wyrazie $a_{17} = 97$. Zatem:

$$S_{17} = \frac{1 + 97}{2} \cdot 17 = 49 \cdot 17 = 833$$

Ćwiczenie 5

Oblicz sumę, której składniki są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 7 + 11 + 15 + \dots + 47 + 51 & \text{c) } -5 - 7 - 9 - \dots - 29 - 31 \\ \text{b) } \frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + \dots + 99\frac{1}{2} + 100 & \text{d) } -18 - 15 - 12 - \dots + 15 + 18 \end{array}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa:

$$\text{a) } 3, \qquad \text{b) } 4, \qquad \text{c) } 3 \text{ lub } 4.$$

Zadania

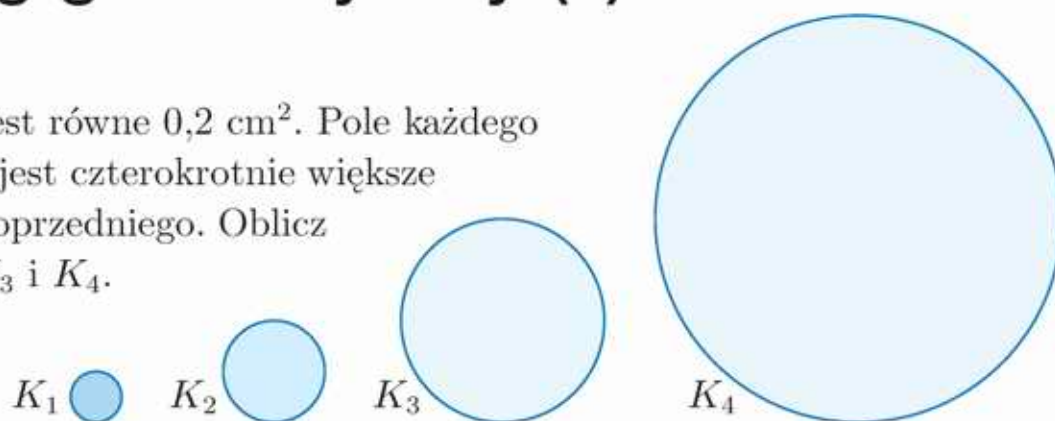
- Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
 - $a_1 = -2$ i $r = 3$
 - $a_1 = 4$ i $r = -5$
 - $a_1 = 1,5$ i $r = -0,1$
- Oblicz wyrazy a_1 i a_{10} oraz sumę S_{10} ciągu arytmetycznego (a_n) .
 - $a_4 = 6$ i $a_8 = 14$
 - $a_6 = 1$ i $a_8 = 3$
 - $a_2 = 12$ i $a_4 = 0$

3. Ustal, ile wyrazów ma podany niżej ciąg arytmetyczny, i oblicz ich sumę.
 a) 4, 7, 10, ..., 34 b) $\frac{1}{3}, 1, 1\frac{2}{3}, \dots, 9\frac{2}{3}$ c) -3, -5, -7, ..., -41
4. a) Oblicz sumę wszystkich liczb parzystych zawartych między 21 a 2021.
 b) Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych nieparzystych dodatnich.
5. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, których reszta z dzielenia:
 a) przez 5 jest równa 1 i które są mniejsze od 100,
 b) przez 4 jest równa 3 i które są większe od 10 oraz mniejsze od 80,
 c) przez 6 jest większa od 3 i które są mniejsze od 100.
6. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 1001, które są podzielne przez:
 a) 2 lub 3, b) 3 lub 5, c) 5 lub 9.
7. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 3, które:
 a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe, c) są mniejsze od 500.
8. Ciąg arytmetyczny składa się z dziesięciu wyrazów. Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy 7, a suma dwóch wyrazów środkowych jest równa 8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu oraz sumę wszystkich jego wyrazów.
- D** 9. Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbf{N}_+$.
 a) $6 + 12 + 18 + \dots + 6n = 3n(n + 1)$
 b) $4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2) = n(3n + 1)$
10. Ile początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać sumę 546?
 a) 6, 8, 10, ... b) 13, 17, 21, ... c) -24, -22, -20, ...
11. Rozwiąż równanie.
 a) $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + x = 190$
 b) $(1 + x) + (3 + x) + (5 + x) + \dots + (25 + x) = 130$
 c) $(1 + x) + (2 + 3x) + (3 + 5x) + (4 + 7x) + \dots + (50 + 99x) = 275$
 d) $(1 + x) + (5 + 2x) + (9 + 3x) + \dots + (61 + 16x) = -48$
12. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
 a) $a_n = \frac{5 + 10 + 15 + \dots + 5n}{n + 3}$ c) $a_n = \frac{6 + 12 + 18 + \dots + 6n}{n^2}$
 b) $a_n = \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n + 5}$ d) $a_n = \frac{3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)}{n^2 + n}$

3.9. Ciąg geometryczny (1)

Ćwiczenie 1

Pole koła K_1 jest równe $0,2 \text{ cm}^2$. Pole każdego kolejnego koła jest czterokrotnie większe od pola koła poprzedniego. Oblicz pola kół K_2 , K_3 i K_4 .



Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągami geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 2

Podaj iloraz ciągu geometrycznego i wypisz jego dwa następne wyrazy.

a) $3, 6, 12, \dots$

c) $4, 2, 1, \dots$

e) $1, -2, 4, \dots$

b) $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$

d) $64, 16, 4, \dots$

f) $-27, 9, -3, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_2 , a_3 , a_4 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_1 = 1, q = 3$

c) $a_1 = 5, q = -1$

e) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, q = \sqrt{2}$

b) $a_1 = 16, q = \frac{1}{2}$

d) $a_1 = \frac{1}{4}, q = -2$

f) $a_1 = \sqrt{2}, q = \sqrt{6}$

Twierdzenie

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla dowolnego $n \geq 1$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Ćwiczenie 4

Oblicz iloraz ciągu geometrycznego, wiedząc, że jego dwa kolejne wyrazy to:

a) 27 i 243 ,

c) -216 i -36 ,

e) $\sqrt{2}$ i -4 ,

b) $\frac{8}{9}$ i $\frac{4}{3}$,

d) $-\frac{6}{5}$ i $\frac{9}{10}$,

f) $2\sqrt{3}$ i $3\sqrt{2}$.

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest ciągiem geometrycznym.

- a) 4, 8, 16, 32, 60, 120, ... b) 1, -2, 4, -8, 16, 32, ... c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{27}{32}, \frac{81}{64}, \dots$

Przykład 1

Oblicz jedenasty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli $a_1 = 3$ oraz iloraz ciągu $q = 2$.

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$\vdots$

$$a_{11} = 3 \cdot 2^{10} = 3072$$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu geometrycznego, obliczamy $a_1 \cdot q^{11-1}$.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:

a) $a_1 = \frac{1}{8}, q = 2, n = 6,$

e) $a_1 = -2, q = -3, n = 5,$

b) $a_1 = 25, q = \frac{1}{5}, n = 7,$

f) $a_1 = -7, q = -1, n = 15,$

c) $a_1 = 8, q = \frac{2}{3}, n = 4,$

g) $a_1 = 5, q = \sqrt{2}, n = 9,$

d) $a_1 = \frac{1}{10}, q = 2\frac{1}{2}, n = 6,$

h) $a_1 = \sqrt{3}, q = -\frac{\sqrt{3}}{3}, n = 8.$

Ćwiczenie 7

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:

a) $a_4 = 1, q = \frac{1}{2},$

b) $a_6 = 16, q = -2,$

c) $a_8 = 81, q = 3.$

Zadania

1. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) o podanych wyrazach początkowych. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz a_7 .

a) 128, 64, 32, ...

c) $\frac{1}{243}, -\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \dots$

e) $\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, \dots$

b) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, \dots$

d) $\frac{625}{256}, \frac{125}{64}, \frac{25}{16}, \dots$

f) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$

2. Oblicz wyrazy czwarty i piąty podanego ciągu geometrycznego.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}, 2 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 2, \dots$ b) $\sqrt{2} - 1, 1, \sqrt{2} + 1, \dots$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli wiadomo, że $a_4 = 6$ oraz $a_6 = 54$.

Jeżeli q jest ilorazem ciągu (a_n) , to $a_4 = a_1 \cdot q^3$ oraz $a_6 = a_1 \cdot q^5$, zatem otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 6 \\ a_1 \cdot q^5 = 54 \end{cases}$$

Dzielimy stronami drugie równanie przez pierwsze:

$$\frac{a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q^3} = \frac{54}{6}$$

Stąd $q^2 = 9$, czyli $q = -3$ lub $q = 3$.

Dla $q = -3$ mamy $a_1 = -\frac{2}{9}$, zatem wzór ogólny ciągu: $a_n = -\frac{2}{9} \cdot (-3)^{n-1}$ (kolejne wyrazy ciągu: $-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -2, 6, -18, \dots$).

Dla $q = 3$ mamy $a_1 = \frac{2}{9}$, zatem wzór ogólny ciągu: $a_n = \frac{2}{9} \cdot 3^{n-1}$ (kolejne wyrazy ciągu: $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18, \dots$).

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli wiadomo, że:

- a) $a_2 = \frac{5}{12}, a_3 = \frac{2}{15}$, c) $a_2 = 7, a_4 = 28$, e) $a_6 = 32, a_{10} = 2$,
b) $a_3 = 1\frac{1}{2}, a_4 = 1\frac{1}{4}$, d) $a_3 = -3, a_6 = -24$, f) $a_6 = 1, a_8 = 9$.

4. Oblicz brakujące wyrazy ciągu geometrycznego.

- a) $?, ?, -27, -9, ?$ c) $?, 6, ?, ?, 48, ?$ e) $8, ?, ?, ?, ?, \frac{1}{4}$
b) $?, ?, ?, ?, 3, -6$ d) $?, ?, 3, ?, ?, -81$ f) $\frac{5}{9}, ?, ?, ?, ?, 135$

5. Wstaw między liczby x i y trzy liczby tak, aby otrzymać ciąg geometryczny (podaj dwa rozwiązania).

- a) $x = -2, y = -32$ b) $x = 3, y = 768$ c) $x = 7, y = 7$

6. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że:

- a) suma drugiego i trzeciego wyrazu tego ciągu jest równa 6, a różnica czwartego i drugiego wyrazu jest równa 24,
b) suma drugiego i szóstego wyrazu tego ciągu jest równa -34 , a suma pierwszego i piątego wyrazu jest równa 17.

3.10. Ciąg geometryczny (2)

Przykład 1

Pani Kasia ulokowała 2000 zł na koncie o stałym oprocentowaniu 5% w skali roku. W tabeli obok przedstawiono stan oszczędności pani Kasi po upływie kolejnych lat. I tak po upływie roku stan konta wyniesie:

$$2000 \cdot 105\% = 2000 \cdot 1,05 = 2100 \text{ [zł]}$$

Po upływie dwóch lat:

$$2100 \cdot 105\% = 2100 \cdot 1,05 = 2205 \text{ [zł]}$$

Wpłata:	2000,00
$2000,00 \cdot 1,05 =$	2100,00
$2100,00 \cdot 1,05 =$	2205,00
$2205,00 \cdot 1,05 =$	2315,25
$2315,25 \cdot 1,05 \approx$	2431,01
$2431,01 \cdot 1,05 \approx$	2552,56

Otrzymany ciąg jest przykładem rosnącego ciągu geometrycznego.

Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ i ilorazie q jest:

- **rosnący**, gdy $q > 1$, ■ **malejący**, gdy $0 < q < 1$, ■ **stały**, gdy $q = 1$.

Ćwiczenie 1

- D** a) Sformułuj i uzasadnij analogiczne twierdzenie o monotoniczności ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie ujemnym.
- b) Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij. Podaj przykłady odpowiednich ciągów geometrycznych i określ ich monotoniczność.

	$a_1 < 0$	$a_1 > 0$
$q < 0$	?	$1, -2, 4, -8, 16, \dots$ nie jest monotoniczny
$q = 0$	$-3, 0, 0, 0, 0, \dots$ niemalejący	?
$0 < q < 1$	?	?
$q > 1$	?	?

Uwaga. Stałym ciągiem geometrycznym jest również ciąg: $0, 0, 0, 0, \dots$ Jego pierwszy wyraz $a_1 = 0$, a iloraz może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli:

- a) $a_3 = 2$, $a_5 = 4,5$, b) $a_1 = -8$, $a_5 = -\frac{1}{2}$, c) $a_2 = -4$, $a_6 = -64$.

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest geometryczny, należy sprawdzić, czy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

D Przykład 2

Wykaż, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = 3 \cdot 4^n$ jest ciągiem geometrycznym. Określ jego monotoniczność.

Wyznaczamy iloraz ciągu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 4^{n+1}}{3 \cdot 4^n} = 4$$

Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest geometryczny. Jest to ciąg rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q = 4 > 1$.

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_n = \frac{5}{2^n}$

c) $a_n = -\frac{1}{3} \cdot 2^n$

e) $a_n = 6 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$

b) $a_n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n$

d) $a_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

f) $a_n = 4^{2n+1}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

Liczby a, b, c , różne od zera, tworzą ciąg geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a \cdot c$.

Ćwiczenie 5

Podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz x .

a) $x, x+1, x-3$

b) $\frac{1}{x+1}, x, 3x^2$

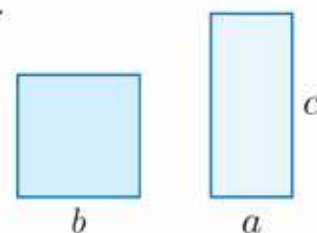
c) $x^2-1, x+1, 2x-1$

■ Średnia geometryczna

Jeśli liczby a, b, c tworzące ciąg geometryczny są dodatnie, to $b = \sqrt{a \cdot c}$.

Liczbę $\sqrt{a \cdot c}$ nazywamy **średnią geometryczną** liczb a i c .

Pole kwadratu o boku b jest równe polu prostokąta o bokach a i c , jeśli b jest równe średniej geometrycznej liczb a i c .



Twierdzenie

W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Zadania

- D** 2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: 2, 4, 8, 14, ... Badamy ilorazy:

Zatem ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

a) $a_n = n^2 - 2n + 2$

3. Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) .

$$\text{e) } \begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 1 \\ a_2^2 + a_3^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 6 \\ a_3^2 - a_2^2 = 12 \end{cases}$$

5. Liczby x, y, z tworzą monotoniczny ciąg geometryczny. Podwojona suma pierwszej i drugiej liczby jest równa sumie drugiej i trzeciej liczby, a suma tych trzech liczb jest równa 77. Wyznacz te liczby.

-

- $$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

180 3. Ciagi

3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Przykład 1

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

Aby obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, można skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dowód

Kolejne wyrazy ciągu to: $a_1, a_2 = a_1q, a_3 = a_1q^2, \dots, a_n = a_1q^{n-1}$, zatem:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n$$

Mnożymy obie strony równania przez q .

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$$

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dzielimy obie strony równania przez $1 - q$ (z założenia $q \neq 1$).

Uwaga. Jeśli iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 1, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu dana jest wzorem $S_n = n \cdot a_1$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, korzystając z podanego wzoru. Sprawdź otrzymany wynik, dodając wyrazy ciągu.

a) $1, 3, 9, 27, \dots$

b) $1, -2, 4, -8, \dots$

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{1}{32}$ oraz:

a) $q = 2,$

b) $q = 4,$

c) $q = 1.$

Ćwiczenie 3

Oblicz sumę S_n ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że:

a) $a_1 = 3, a_2 = -6, n = 6,$

b) $a_1 = -4, a_2 = -12, n = 5.$

Przykład 2

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie 3. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 1456?

Niech n będzie szukaną liczbą wyrazów. Wówczas:

$$4 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = 1456$$

$$1 - 3^n = -728$$

$$3^n = 729$$

$$n = 6$$

Należy dodać sześć początkowych wyrazów tego ciągu.

Ćwiczenie 4

a) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 635?

b) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 2 i ilorazie $\frac{3}{2}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać $16\frac{1}{4}$?

Ćwiczenie 5

Suma pierwszego i czwartego wyrazu ciągu geometrycznego jest równa 26, a suma drugiego i piątego wyrazu jest równa -78 . Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać -61 ?

Ciąg (b_n) nazywamy **podciągiem** ciągu (a_n) , jeśli możemy go otrzymać poprzez wybranie jego wyrazów spośród wyrazów ciągu (a_n) bez zmiany ich kolejności. Na przykład podciągami ciągu geometrycznego 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... są:

2, 8, 32, 128, 512, ... – podciąg wyrazów o numerach parzystych,

1, 4, 16, 64, 256, ... – podciąg wyrazów o numerach nieparzystych,

512, 1024, 2048, 4096, ... – podciąg wyrazów podzielnych przez 512.

Ćwiczenie 6

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a iloraz jest równy -2 . Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów jego podciągu złożonego z wyrazów o numerach:

a) nieparzystych,

b) parzystych.

Zadania

1. Oblicz sumę S_8 ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli jego wyrazy pierwszy i drugi są odpowiednio równe:

a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{8},$ b) 18, 6, c) 15, -30, d) -7, -7.

2. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , jeśli:

a) $a_1 = -1, q = 2, n = 8,$ c) $a_1 = 3, q = -\sqrt{2}, n = 10,$

b) $a_1 = \frac{2}{9}, q = \frac{3}{2}, n = 5,$ d) $a_1 = 5, q = 1, n = 20.$

3. Ciąg (a_n) jest geometryczny. Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij.

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	?	?	242
?	$\frac{1}{2}$	7	$-\frac{1}{2}$	?
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{2}$	8	?	?

4. Pola dziesięciu kwadratów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$. Największy spośród tych kwadratów ma pole równe 1 cm^2 . Oblicz sumę ich:



a) pól, b) obwodów.

5. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , jeśli:

a) $q = 2, S_4 = 60,$ c) $q = 3, S_6 = 728,$ e) $q = -\sqrt{2}, S_6 = -7,$

b) $q = \frac{1}{2}, S_4 = 2046,$ d) $q = -\frac{1}{2}, S_5 = 33,$ f) $q = -1, S_{13} = 9.$

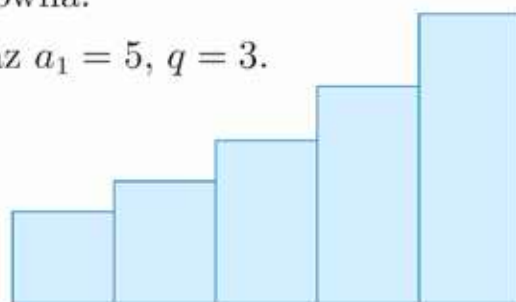
6. Ile początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2 należy dodać, aby otrzymać:

a) 315, b) 2555, c) 5115?

7. Wyznacz liczbę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , jeśli suma wszystkich wyrazów jest równa:

a) 258 oraz $a_1 = 6, q = -2,$ b) 1820 oraz $a_1 = 5, q = 3.$

8. Pola pięciu prostokątów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{4}{3}$. Suma tych pól jest równa $\frac{781}{90} \text{ cm}^2$. Oblicz pole najmniejszego prostokąta.



9. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że:
 - a) $S_3 = 35$, a różnica wyrazów pierwszego i czwartego jest równa 17,5,
 - b) $S_4 = 20$, a różnica wyrazów pierwszego i trzeciego jest równa 8.
10. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 33, a różnica wyrazów pierwszego i szóstego jest równa 99. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.
11. Wyznacz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = x$ i ilorazie $q = -1$, jeśli wiadomo, że n jest liczbą:
 - a) parzystą, b) nieparzystą.
12. Ciąg geometryczny (a_n) spełnia warunki: $S_5 - S_3 = 72$ i $a_4 - a_3 = 12$. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.
13. Suma czterech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego jest równa 8, a suma kolejnych czterech jest równa 72. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.
14. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 6, a stosunek sumy pięciu początkowych wyrazów tego ciągu do sumy kolejnych pięciu wyrazów wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.
15. Dany jest dziesięciowyrazowy ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q . Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 341, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 682. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
16. Iloczyn czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich jest równy 324. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu, jeżeli $a_1 - a_2 = 6$.
17. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 21, a suma trzech następnych jest równa 168. Który wyraz tego ciągu jest równy 192?
18. Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 93 \quad \text{ i } \quad a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 372$$
 Oblicz pierwszy wyraz oraz iloraz tego ciągu.
- D 19. Dany jest skończony ciąg geometryczny o parzystej liczbie wyrazów. Iloraz i pierwszy wyraz tego ciągu są różne od zera. Wykaż, że stosunek sumy wyrazów o numerach parzystych do sumy wyrazów o numerach nieparzystych jest równy ilorazowi tego ciągu.

3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

Przykład 1

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = 2n^2$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu:

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$$

Dla $n > 1$ wyraz a_n możemy wyznaczyć ze wzoru $a_n = S_n - S_{n-1}$:

$$a_n = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 2n^2 - 2(n^2 - 2n + 1) = 4n - 2$$

Stąd $a_{n+1} = 4(n+1) - 2 = 4n + 2$.

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4n + 2 - (4n - 2) = 4$ dla $n > 1$.

Należy jeszcze obliczyć różnicę $a_2 - a_1$:

$$a_2 - a_1 = (4 \cdot 2 - 2) - 2 = 4$$

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, więc ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, jeśli:

a) $S_n = n^2 - 4$, b) $S_n = n^2 + 2n$, c) $S_n = 6n - 2n^2$, d) $S_n = 2n$.

Przykład 2

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 21. Jeśli od pierwszej i drugiej liczby odejmiemy 3, a od trzeciej odejmiemy 1, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

Zapisujemy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: $a - r$, a , $a + r$. Ich suma:

$$a - r + a + a + r = 21$$

$$a = 7$$

Zatem szukane liczby mają postać: $7 - r$, 7 , $7 + r$.

Zgodnie z warunkami zadania liczby $4 - r$, 4 , $6 + r$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, zatem zachodzi równość:

$$4^2 = (4 - r)(6 + r)$$

$$r^2 + 2r - 8 = 0$$

$$r = -4 \text{ lub } r = 2$$

Dla $r = -4$ otrzymujemy liczby: 11, 7, 3.

Dla $r = 2$ otrzymujemy liczby: 5, 7, 9.

Ćwiczenie 2

- a) Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli od drugiej z nich odejmiemy 1, a do trzeciej dodamy 6, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
- b) Liczby a , b , c , których suma jest równa 12, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby $a + 1$, $b + 2$, $c + 6$ – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz liczby a , b , c .

Zadania

- a) Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu.
b) Jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 20. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.
- Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) . Stosunek sumy dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych do sumy dziesięciu początkowych wyrazów o numerach nieparzystych jest równy $\frac{9}{8}$. Suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa 12. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
- Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 15, a suma ich odwrotności jest równa $\frac{3}{20}$. Wyznacz te liczby.
- Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:
$$a_1 + a_5 = 68 \quad \text{ i } \quad a_2 + a_6 = 136$$
Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 2044?
- W sześciowyrazowym ciągu geometrycznym suma pięciu początkowych wyrazów jest równa 11, a suma pięciu ostatnich – jest równa 33. Oblicz iloraz oraz wyrazy pierwszy i szósty tego ciągu.
- Trzy liczby, których suma jest równa 28, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są również kolejno wyrazami pierwszym, drugim i czwartym ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.
- a) W dziewięciowyrazowym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy 4, wyrazy pierwszy, trzeci i siódmy tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.
b) W sześciowyrazowym malejącym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy -1 , wyrazy pierwszy, drugi i piąty tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.

8. a) Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 15. Jeśli pierwszą i drugą z tych liczb zwiększymy o 1, a trzecią – o 4, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
b) Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy 8, a drugą i trzecią zostawimy bez zmian, to tak otrzymany ciąg będzie ciągiem geometrycznym. Wyznacz te liczby, jeśli suma wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 26.
9. a) Trzy liczby, których suma jest równa 13, tworzą malejący ciąg geometryczny. Jeśli od ostatniej liczby odejmiemy 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.
b) Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny, a ich suma jest równa 52. Jeśli pierwszą i drugą liczbę zostawimy bez zmian, a od trzeciej odejmiemy 16, to otrzymamy kolejne wyrazy rosnącego ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.
10. a) Wstaw między liczby 5 i 30 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.
b) Wstaw między liczby -4 i 32 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy – ciąg geometryczny.
11. Z czterech zapisanych kolejno liczb pierwsze trzy tworzą ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby, jeśli suma pierwszej i ostatniej jest równa 1, a suma drugiej i trzeciej jest równa $\frac{3}{4}$.

12. W trójkąt równoboczny wpisujemy okrąg, a następnie w okrąg wpisujemy trójkąt równoboczny itd. (rysunek obok). Otrzymujemy w ten sposób ciąg trójkątów równobocznych i ciąg okręgów.



- D** a) Uzasadnij, że ciąg obwodów kolejnych trójkątów jest geometryczny. Podaj jego iloraz.
b) Bok największego trójkąta ma długość 4. Oblicz sumę obwodów pięciu największych trójkątów oraz sumę ich pól.
- D** 13. Wykaż, że jeśli liczby $\frac{1}{x+y}$, $\frac{1}{x+z}$ i $\frac{1}{y+z}$ tworzą ciąg arytmetyczny, to również liczby x^2 , y^2 i z^2 tworzą ciąg arytmetyczny.
- D** 14. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o wyrazach całkowitych, to ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = 2^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym.

Ciągi liczb całkowitych

Ponad pięćdziesiąt lat temu amerykański matematyk Neil Sloane [czyt. nil słon] stworzył katalog ciągów liczb całkowitych obecnie funkcjonujący jako **Encyklopedia ciągów liczb całkowitych w wersji on-line** (oeis.org). Opisanych jest w niej ponad ćwierć miliona różnych ciągów. Aby znaleźć informacje o ciągu, należy podać jego numer w katalogu, nazwę lub początkowe wyrazy. Na przykład:

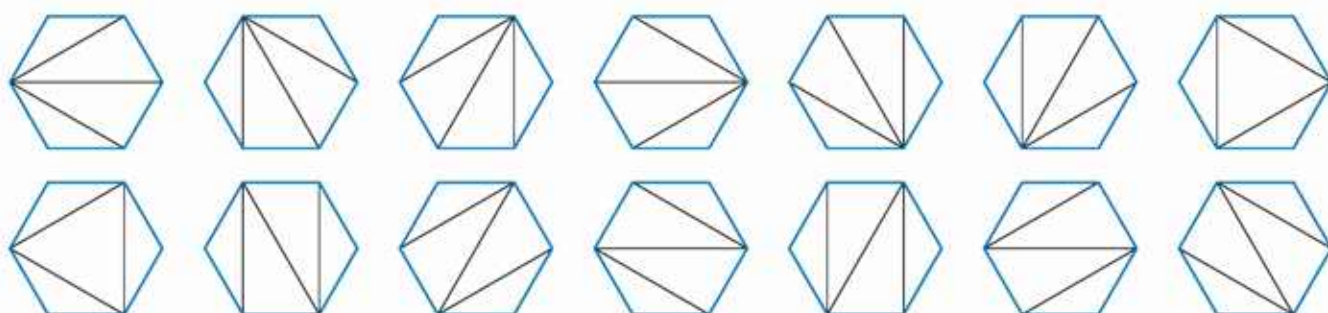
- pod numerem A000045 znajduje się ciąg Fibonacciego (patrz str. 158),
- pod numerem A000108 znajduje się ciąg liczb Catalana [czyt. katalana]:

1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...

Ciąg liczb Catalana określony jest wzorem $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Zatem:

$$c_1 = \frac{2!}{2!1!} = 1, c_2 = \frac{4!}{3!2!} = 2, c_3 = \frac{6!}{4!3!} = 5, c_4 = \frac{8!}{5!4!} = 14, \dots$$

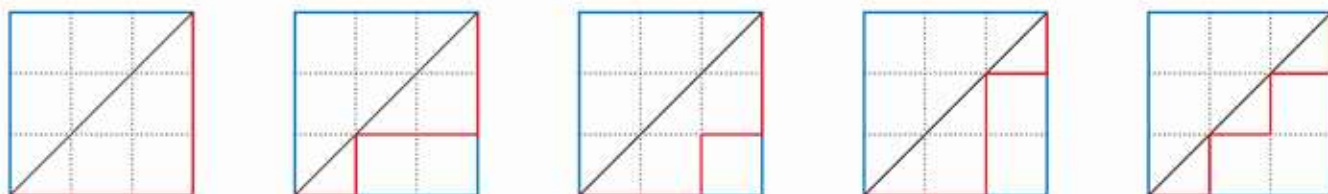
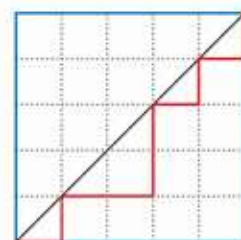
Ciąg ten ma wiele interpretacji geometrycznych, np. dla $(n+2)$ -kąta wypukłego liczba jego możliwych podziałów na trójkąty nieprzecinającymi się przekątnymi jest równa n -tej liczbie Catalana. Dla sześciokąta istnieje 14 takich podziałów:



Rozważmy teraz kwadrat o wymiarach $n \times n$ z siatką całkowitą, jak na rysunku poniżej, oraz drogi prowadzące z lewego dolnego rogu tego kwadratu do jego prawego górnego rogu spełniające warunki:

- poruszamy się po siatce całkowitej w prawo albo w górę,
- nie przechodzimy nad przekątną kwadratu.

Okazuje się, że liczba takich dróg jest n -tą liczbą Catalana. Na poniższych rysunkach przedstawiono wszystkie możliwe drogi dla $n = 3$ ($c_3 = 5$).



1. Narysuj odpowiednie rysunki i sprawdź, czy dla kwadratu 4×4 istnieje $c_4 = 14$ różnych dróg spełniających warunki opisane wyżej.

3.13. Procent składany

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym r , wzrośnie po roku do kwoty $k(1 + r)$.

Przykład 1

Pani Kowalska wpłaciła do banku 1000 zł na lokatę oprocentowaną 6% w skali roku. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po trzech latach, a do jakiej po dwudziestu?

Kwota po roku: $1000 + 6\% \cdot 1000 = 1060$ [zł]

Kwota po 2 latach: $1060 + 6\% \cdot 1060 = 1060 + 63,6 = 1123,6$ [zł]

Kwota po 3 latach: $1123,6 + 6\% \cdot 1123,6 = 1123,6 + 67,416 \approx 1191,02$ [zł]

Zauważ, że w kolejnych latach doliczane są odsetki w wysokości 6% do kapitału powiększonego o odsetki z poprzednich lat.

Wyznaczenie powyższą metodą kwoty, do jakiej wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po dwudziestu latach, jest bardzo pracochłonne. Zauważmy jednak, że każdego roku do każdej złotówki bank dopisuje 6% odsetek, czyli co roku kapitał powiększa się 1,06 razy.

Kapitał wynosi więc:

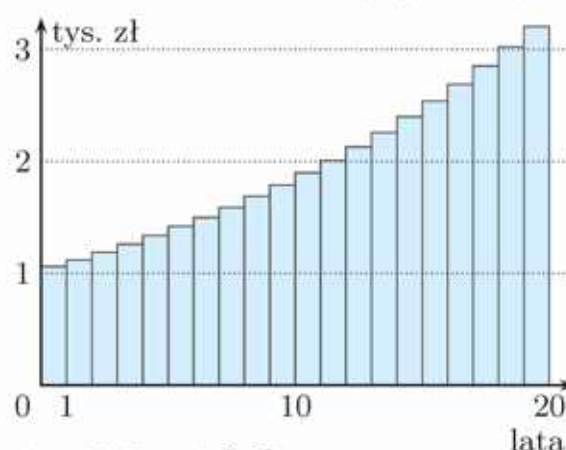
po roku: $k \cdot 1,06$

po 2 latach: $k \cdot (1,06)^2$

po 3 latach: $k \cdot (1,06)^3$

⋮

po 20 latach: $k \cdot (1,06)^{20} \approx 1000 \cdot 3,20714 = 3207,14$ [zł]



Jeżeli w kolejnych latach odsetki dopisywane są do kapitału powiększonego o wcześniej nagromadzone odsetki, to mówimy, że kapitał został złożony na **procent składany**.

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na n lat na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r , po n latach wzrośnie do kwoty $k(1 + r)^n$.

Ćwiczenie 1

Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku 5000 zł na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r ?

a) $n = 5$, $r = 4,5\%$

b) $n = 8$, $r = 5,5\%$

c) $n = 10$, $r = 3\%$

Dopisywanie odsetek do kapitału nazywa się **kapitalizacją odsetek** lub krótko **kapitalizacją**, a czas, po jakim ona następuje, nazywa się **okresem kapitalizacji**.

Przykład 2

Rodzice Basi złożyli w banku 5000 zł na trzy lata. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 6%, w ostatnich dwóch latach 5%, a kapitalizacja odsetek następowała co rok. Do jakiej kwoty wzrósłby ten kapitał po trzech latach, gdyby odsetki nie były opodatkowane, a do jakiej – gdyby od naliczanych odsetek pobierany był co roku podatek w wysokości 20%?

Jeśli odsetki nie byłyby opodatkowane, to oszczędności po trzech latach wyniosłyby:

$$5000 \cdot 1,06 \cdot (1,05)^2 = 5843,25 \text{ [zł]}$$

Jeśli od naliczanych odsetek byłby pobierany podatek, to odsetki te byłyby pomniejszane o 20%, zatem w pierwszym roku wpłacona kwota wzrosłaby o:

$$0,06 \cdot 0,8 = 0,048 = 4,8\%$$

a w drugim i trzecim roku o:

$$0,05 \cdot 0,8 = 0,04 = 4\%$$

Zatem po trzech latach kapitał wzrósłby do:

$$5000 \cdot (1,048) \cdot (1,04)^2 \approx 5667,58 \text{ [zł]}$$

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%. W tym rozdziale, dla ułatwienia obliczeń, podatek ten pomijamy lub przyjmujemy, że wynosi 20%. Zwróć uwagę na to, że podatek płaci się tylko od dopisywanych odsetek, a nie zgromadzonego kapitału.

Ćwiczenie 2

Kapitał 5000 zł złożono w banku na dziesięć lat przy oprocentowaniu wynoszącym 5% i rocznej kapitalizacji odsetek. Oblicz wysokość dopisanych odsetek. Jak zmieni się wielkość kapitału, jeśli od odsetek naliczany jest podatek w wysokości 20% w skali roku?

Ćwiczenie 3

Kapitał w wysokości 800 zł złożono w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego czasu, jeśli kapitalizacja odsetek była roczna, od odsetek naliczano podatek w wysokości 20% w skali roku, a oprocentowanie:

- w pierwszych dwóch latach wynosiło 8%, w ostatnich trzech – 4%,
- w pierwszych trzech latach wynosiło 4%, w ostatnich dwóch – 8%,
- w pierwszych dwóch latach wynosiło 7%, w kolejnych dwóch – 5%, w ostatnim roku – 2%.

Odsetki mogą być dopisywane częściej niż co rok. Jeżeli dopisywane są co kwartał, mówimy o kapitalizacji kwartalnej, jeśli co miesiąc – o kapitalizacji miesięcznej.

Twierdzenie

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym r i kapitalizacji m razy w roku, po n latach wzrośnie do:

$$k \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Przykład 3

W bankach A , B i C lokaty terminowe są oprocentowane 6% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane: w banku A – co rok, w banku B – co kwartał, a w banku C – co miesiąc. Do każdego z tych banków wpłacono 1000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

Kapitał po roku wyniesie:

w banku A : $1000 \cdot (1 + 0,06) = 1060$ [zł],

w banku B : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^4 = 1000 \cdot (1,015)^4 \approx 1000 \cdot 1,06136 = 1061,36$ [zł],

w banku C : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} = 1000 \cdot (1,005)^{12} \approx 1000 \cdot 1,06168 = 1061,68$ [zł].

Zatem odsetki dopisane w tych bankach to kolejno: 60 zł, 61,36 zł i 61,68 zł. Kapitał wzrośnie więc: w banku A – o 6%, w banku B – o $\frac{61,36}{1000} = 0,06136 \approx 6,14\%$, a w banku C – o $\frac{61,68}{1000} = 0,06168 \approx 6,17\%$.

Roczną stopę procentową r taką, że odsetki w wysokości $\frac{r}{m}$ kapitalizowane są m razy w roku, nazywa się **nominalną stopą** procentową. Rzeczywisty przyrost kapitału pokazuje **efektywna stopa** procentowa p , przy której odsetki kapitalizowane są raz, na koniec roku. Między tymi stopami zachodzi następująca zależność:

$$1 + p = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

Ćwiczenie 4

Bank X oferuje kapitalizację półroczną przy rocznej stopie 8%, a bank Y – kapitalizację kwartalną przy rocznej stopie r . Dla jakiej wartości stopy r oprocentowanie w skali roku jest w obu bankach najbardziej zbliżone?

A. $r = 4\%$

B. $r = 7,92\%$

C. $r = 8\%$

Ćwiczenie 5

Pani Katarzyna złożyła w banku kwotę 10 000 zł na lokatę oprocentowaną 4% rocznie. Oblicz, do jakiej kwoty wzrośnie jej kapitał po pięciu latach, jeśli odsetki będą kapitalizowane:

- a) co rok, b) co pół roku, c) co kwartał, d) co miesiąc.

Ćwiczenie 6

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rodzice założyli konto trzynastoletniej córce. Postanowili wpłacać na nie 200 zł na początku każdego roku przez pięć lat. Oprocentowanie roczne w całym tym okresie wynosi 5%, a kapitalizacja następuje co rok. Jaką kwotę będzie miała na koncie ich córka w wieku 18 lat?

Pierwsza wpłata w wysokości 200 zł będzie kapitalizowana pięć razy, druga – wpłacona rok później – cztery razy i każda kolejna wpłata będzie kapitalizowana o jeden raz mniej. Zatem kapitał po pięciu latach będzie wynosił:

$$\begin{aligned} & 200 \cdot 1,05^5 + 200 \cdot 1,05^4 + 200 \cdot 1,05^3 + 200 \cdot 1,05^2 + 200 \cdot 1,05 = \\ & = 200(1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5) = \text{Korzystamy ze wzoru na} \\ & = 200 \cdot 1,05 \cdot \frac{1-(1,05)^5}{1-1,05} \approx 1160,38 \text{ [zł]} \quad \text{sumę ciągu geometrycznego.} \end{aligned}$$

Jaka kwota byłaby na koncie opisanym w powyższym przykładzie, gdyby okres oszczędzania był dłuższy o pięć lat?

Ćwiczenie 7

a) Pani Ania zamierza wpłacać 500 zł na konto na początku każdego roku. Oprocentowanie konta wynosi 4% w skali roku, a odsetki są kapitalizowane co rok. Jakie środki zostaną zgromadzone na koncie pani Ani po 8 latach, a jakie – po 20 latach oszczędzania?

b) Jaki kapitał znajdzie się na koncie osiemnastolatka, jeżeli rodzice, począwszy od dnia jego urodzenia, wpłacali mu do banku co rok 300 zł? Oprocentowanie wynosiło 6% w skali roku, a odsetki były kapitalizowane co miesiąc.

Ćwiczenie 8

Paweł, który ma 25 lat, zamierza wpłacać 100 zł na fundusz emerytalny na początku każdego miesiąca. Oprocentowanie funduszu wynosi 6% w skali roku, a kapitalizacja odsetek jest miesięczna. Jaki kapitał zostanie zgromadzony przez Pawła, gdy będzie on w wieku: a) 60 lat, b) 65 lat, c) 67 lat?

Zadania

1. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 2000 zł przy oprocentowaniu rocznym r ?
a) $n = 2, r = 5\%$ b) $n = 5, r = 5\%$ c) $n = 10, r = 3\%$
2. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 4000 zł przy oprocentowaniu rocznym r ?
a) $n = 2, r = 4\%$ b) $n = 5, r = 3\%$ c) $n = 10, r = 4\%$
3. Kapitał w wysokości 600 zł został złożony w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu, jeżeli kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie wynosiło w pierwszym roku:
a) 6%, w drugim roku – 5,5%, a w trzech ostatnich latach – 4%,
b) 5,5%, w trzech kolejnych latach – 4%, a w ostatnim roku – 6%.
4. Oprocentowanie lokat w banku A wynosiło w kolejnych czterech latach 9%, 8%, 7% i 6%. Stopa procentowa w banku B była w tym czasie stała i wynosiła r . Oblicz r , jeśli wpłacenie kapitału na cztery lata było w obu bankach równie opłacalne i oba banki kapitalizowały odsetki rocznie.
5. Jaką kwotę należy ulokować na koncie, aby po pięciu latach uzyskać 1217 zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%, a odsetki kapitalizowane są co rok? Jaką kwotę należałoby wpłacić, aby uzyskać taki sam kapitał końcowy po trzech latach?
6. Bank przyjął kwotę 50 000 zł na 5% rocznie, a następnie pożyczył ją na 6% rocznie. Ile zyskał bank w ciągu pięciu lat, a ile by zyskał w ciągu dziesięciu lat?
7. Do banku wpłacono 3000 zł na trzy lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeśli odsetki są kapitalizowane:
a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc, d) codziennie?
8. Warunki oferowane przez banki dla lokat dwuletnich są następujące:
bank A – 5,44% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,
bank B – 5,5% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,
bank C – 5,6% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,
bank D – 5,65% rocznie, odsetki kapitalizowane co rok.
Który z tych banków oferuje najkorzystniejsze warunki?

9. Firma X zaciągnęła w banku kredyt w wysokości 10 000 zł. Co roku bank nalicza odsetki w wysokości 10%. Kredyt wraz z odsetkami ma być spłacony jednorazowo po n latach. Na ile lat został zaciągnięty kredyt, jeżeli wiadomo, że firma X będzie musiała spłacić 13 310 zł?
10. Dziadkowie w dniu narodzin wnuka zdeponowali dla niego w banku kwotę k zł na osiemnaście lat, oprocentowaną 5% w skali roku z roczną kapitalizacją odsetek. Obecnie chłopiec ma dziewięć lat i kwota ta wzrosła do 7757 zł. Ile wynosił kapitał początkowy k zł? Do jakiej kwoty wzrośnie ten kapitał na koniec okresu oszczędzania?
11. Kuba zamierza kupić samochód, który kosztuje 40 000 zł. Zakup finansuje ze środków własnych i zaciągniętego na ten cel kredytu. Kredyt wraz z odsetkami, które wyniosą 1200 zł, ma być spłacony po roku. Ile środków własnych ma Kuba, jeżeli oprocentowanie kredytu wynosi 8% w skali roku?
12. Kapitał w wysokości 1000 zł wpłacono do banku na lokatę z miesięczną kapitalizacją odsetek. Po ilu latach kapitał ten się podwoi, jeżeli wiadomo, że oprocentowanie w skali roku wynosi: a) 6%, b) 3%?
13. Pan Lech na budowę domu zaciągnął kredyt w wysokości 100 000 zł, oprocentowany 10% w skali roku. Kredyt będzie spłacany w równych ratach po 30 000 zł na koniec każdego roku, przy czym ostatnia rata może być mniejsza. Odsetki naliczane są rocznie tylko od niespłaconej części kredytu. W tabeli przedstawiono sposób obliczania stanu zadłużenia po kolejnych latach.

Rok	Doliczone odsetki	Stan zadłużenia
1.	$0,1 \cdot 100\,000 = 10\,000$	$100\,000 + 10\,000 - 30\,000 = 80\,000$
2.	$0,1 \cdot 80\,000 = 8000$	$80\,000 + 8000 - 30\,000 = 58\,000$
3.	$0,1 \cdot 58\,000 = 5800$	$58\,000 + 5800 - 30\,000 = 33\,800$
4.	$0,1 \cdot 33\,800 = 3380$	$33\,800 + 3380 - 30\,000 = 7180$
5.	$0,1 \cdot 7180 = 718$	$7180 + 718 - 7898 = 0$

Zatem łącznie trzeba spłacić $4 \cdot 30\,000 + 7898 = 127\,898$ [zł].

- a) Sporządź analogiczną tabelę dla kredytu w wysokości 100 000 zł, oprocentowanego 20% w skali roku, spłacanego na tych samych zasadach co kredyt pana Lecha. Jaką kwotę trzeba łącznie spłacić?
- b) Ile czasu trwałoby spłacanie takiego kredytu, gdyby oprocentowanie wynosiło 25% w skali roku?

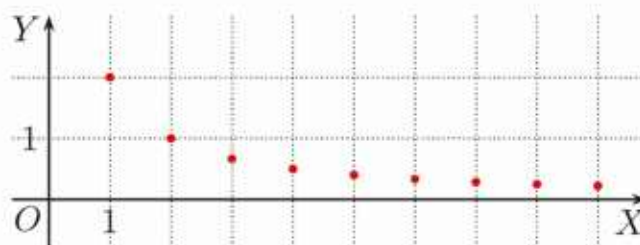
*3.14. Granica ciągu

■ Intuicyjne pojęcie granicy

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = \frac{2}{n}$.

Kolejne wyrazy tego ciągu: $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \dots$ są „coraz bliżej” liczby 0.

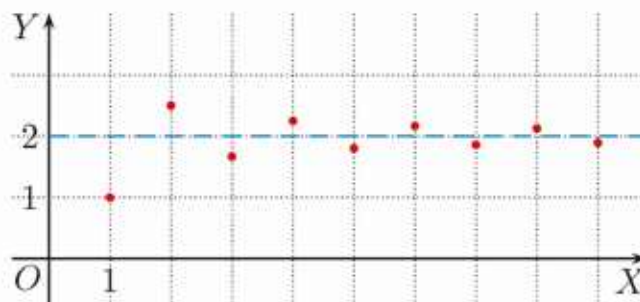


Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu:

$$a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Kolejne wyrazy tego ciągu: $1, 2\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{4}, 1\frac{4}{5}, 2\frac{1}{6}, 1\frac{6}{7}, \dots$ są „coraz bliżej” liczby 2.



W powyższych przykładach wyrazy ciągu są „coraz bliżej” pewnej liczby. Liczbę tę nazywamy **granicą** lub **granicą właściwą** ciągu. Jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g , to piszemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

Skrót „lim” pochodzi od łacińskiego słowa *limes* – granica.

co czytamy: „granicą ciągu a_n przy n dążącym do nieskończoności jest liczba g ” lub „ciąg a_n dąży do liczby g przy n dążącym do nieskończoności”.

Informację tę możemy też zapisać tak: $a_n \rightarrow g$ przy $n \rightarrow \infty$.

Ćwiczenie 1

Naszkuć wykres ciągu (a_n) i na jego podstawie podaj granicę tego ciągu.

a) $a_n = -\frac{3}{n}$

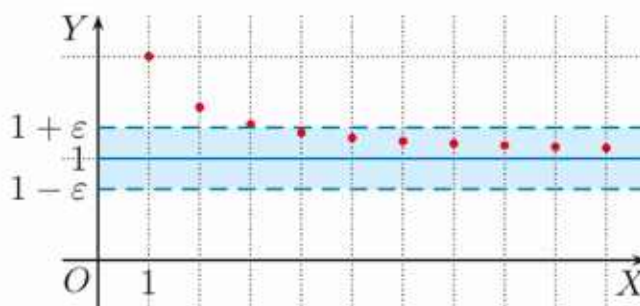
b) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

c) $a_n = 4 - \frac{1}{2^n}$

Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Granicą tego ciągu jest liczba 1, co zapisujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$



Zauważmy, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ **prawie wszystkie** (wszystkie z wyjątkiem skończonej liczby) wyrazy tego ciągu są oddalone od 1 o mniej niż ε , czyli $|a_n - 1| < \varepsilon$, co możemy też zapisać: $a_n \in (1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$ dla prawie wszystkich n .

Definicja

Ciąg (a_n) ma **granice** równą g , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

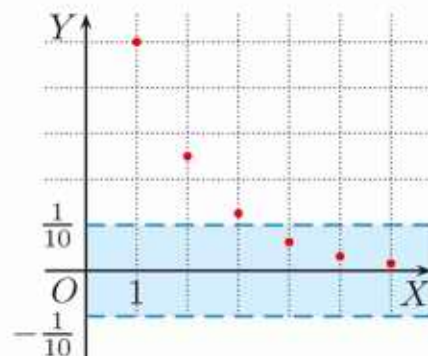
Jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g , to mówimy, że jest **zbieżny** do g .

Przykład 4

Granica ciągu $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest liczba 0.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Na przykład dla $\varepsilon = \frac{1}{10}$ warunek $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| < \varepsilon$ jest spełniony, gdy $n > 3$, a dla $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, gdy $n > 9$.



Ćwiczenie 2

Dany jest ciąg $a_n = 0,9^n$. Sprawdź, dla jakich n spełniona jest nierówność $|a_n - 0| < \frac{1}{10}$.

Twierdzenie

- Jeśli $q \in (-1; 1)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.
- Jeśli $a \in (0; \infty)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Korzystać będziemy również z następujących granic:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Twierdzenie

Jeśli $k > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

Ćwiczenie 3

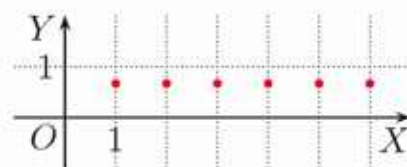
Granica ciągu $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest liczba 0. Które wyrazy tego ciągu spełniają warunek $|a_n - 0| < \varepsilon$, gdy:

- a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, b) $\varepsilon = \frac{1}{50}$, c) $\varepsilon = \frac{1}{100}$, d) $\varepsilon = 10^{-6}$?

Przykład 5

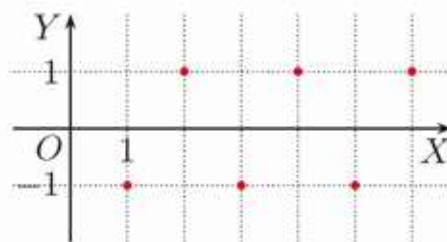
Ciąg stały $a, a, a, \dots$ ma granicę równą a . Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = \frac{2}{3}$.

Granica tego ciągu: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.



Przykład 6

Ciąg naprzemienny $a_n = (-1)^n$ **nie ma granicy**. By to stwierdzić, wystarczy przyjąć $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Nie istnieje liczba g taka, by wyrazy o numerach parzystych (równe 1) i wyrazy o numerach nieparzystych (równe -1) były jednocześnie odległe od g o mniej niż $\frac{1}{2}$.



Twierdzenie

Ciąg może mieć tylko jedną granicę.

Zauważ, że jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g , to liczba ta jest również granicą każdego jego podciągu.

Jeśli dwa podciągi ciągu (a_n) mają różne granice, to ciąg (a_n) nie ma granicy.

Przykład 7

Rozpatrzmy ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Podciąg wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych ma granicę równą 2, a podciąg wyrazów o numerach parzystych ma granicę równą 0. Zatem ciąg (a_n) nie ma granicy.

Ćwiczenie 4

Czy ciąg (a_n) ma granicę?

$$\text{a) } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} \quad \text{b) } a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \sqrt[n]{2} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Zadania

1. Naskicuj wykres ciągu (a_n) . Czy ten ciąg ma granicę?

a) $a_n = 1 + \frac{4}{n}$

c) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

e) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

b) $a_n = 4 - \frac{1}{n}$

d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$

f) $a_n = \frac{(-2)^n}{4}$

2. Które wyrazy ciągu $a_n = \frac{4}{n}$ spełniają warunek $|a_n - 0| < \varepsilon$, gdy:

a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$,

b) $\varepsilon = \frac{1}{50}$,

c) $\varepsilon = \frac{1}{100}$,

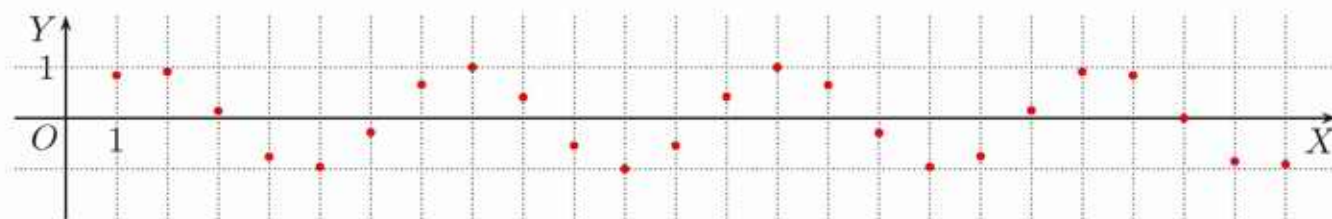
d) $\varepsilon = 10^{-6}$?

3. Dla jakich n spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$?

a) $a_n = \frac{n+1}{n}$, $g = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$

b) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, $g = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{10\,000}$

*3.15. Ciągi rozbieżne



Ciąg, który ma granicę, nazywamy ciągiem zbieżnym. O ciągu, który nie ma granicy, mówimy, że jest **rozbieżny**. Przykładami ciągów rozbieżnych są ciągi $a_n = (-1)^n$ oraz $b_n = \sin n$ (wykres powyżej). Wśród ciągów rozbieżnych wyróżniamy ciągi rozbieżne do $-\infty$ i ciągi rozbieżne do ∞ .

Definicja

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do ∞ , jeśli dla każdej liczby M istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $a_n > M$.

O ciągu rozbieżnym do ∞ mówimy, że ma **granicę niewłaściwą** ∞ , i piszemy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ lub $a_n \rightarrow \infty$ przy $n \rightarrow \infty$.

Przykład 1

Ciąg $a_n = n^2$ jest rozbieżny do ∞ , co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

Prawie wszystkie (wszystkie z wyjątkiem skończonej liczby) wyrazy ciągu są większe od dowolnie wybranej liczby M . Na przykład dla $M = 100$ wszystkie wyrazy, począwszy od jednego, spełniają warunek $a_n > M$.

Ćwiczenie 1

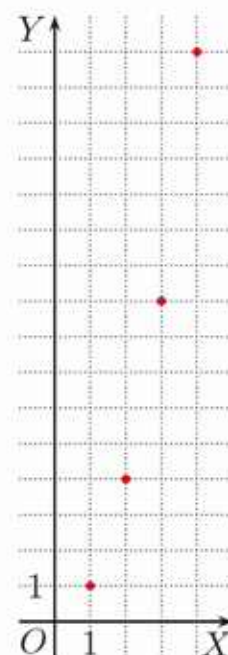
Podaj, dla jakich n zachodzi nierówność $a_n > M$. Czy dla dowolnie wybranej liczby M można wskazać takie n ?

a) $a_n = n - 10$, $M = 100$

c) $a_n = \sqrt{n}$, $M = 40$

b) $a_n = \frac{1}{5}n$, $M = 50$

d) $a_n = 2^n$, $M = 1000$



Definicja

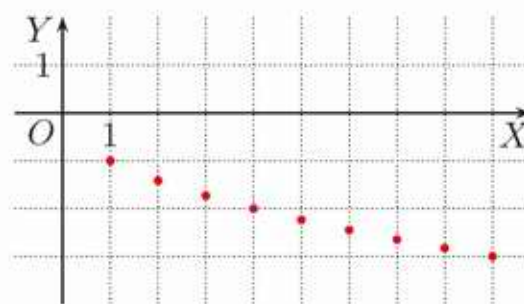
Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$, jeśli dla każdej liczby M istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $a_n < M$.

O ciągu rozbieżnym do $-\infty$ mówimy, że ma **granicę niewłaściwą** $-\infty$, i piszemy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \rightarrow -\infty$ przy $n \rightarrow \infty$.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = -\sqrt{n}$. Jest to ciąg rozbieżny do $-\infty$. Które wyrazy tego ciągu spełniają warunek:

- a) $a_n < -10$, c) $a_n < -1000$,
b) $a_n < -500$, d) $a_n < -10\,000$?



Przykład 2

Czy ciąg $a_n = (-1)^n \cdot n$ ma granicę niewłaściwą?

Ciąg (a_n) nie jest rozbieżny ani do $-\infty$, ani do ∞ , gdyż jego podciąg wyrazów o numerach parzystych jest rozbieżny do ∞ , a podciąg wyrazów o numerach nieparzystych jest rozbieżny do $-\infty$.

Twierdzenie

■ Jeśli $q > 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

■ Jeśli $k > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty$.

Ćwiczenie 3

Czy ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą?

- a) $a_n = \begin{cases} -2^n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ -n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$ b) $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

Zadania

1. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ lub do ∞ .

- a) $a_n = -\frac{1}{10}n$ c) $a_n = 3^n$ e) $a_n = 0,1^n$ g) $a_n = -n^3$
b) $a_n = (-4)^n$ d) $a_n = (-2)^n$ f) $a_n = (0,(9))^n$ h) $a_n = n^2 - 100$

2. Które wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $(M; \infty)$?

- a) $a_n = \frac{1}{2}n^2$, $M = 200$ c) $a_n = \frac{n+1}{10}$, $M = 50$
b) $a_n = \frac{1}{2}n^2$, $M = 20\,000$ d) $a_n = \frac{n+1}{10}$, $M = 500$

3. a) Dany jest ciąg $a_n = \sqrt[n]{n}$. Dla jakich n jest spełniony warunek $a_n > 10$, a dla jakich warunek $a_n > 100$?

b) Dany jest ciąg $a_n = n^3 + 40n^2 - 25n$. Dla jakich n jest spełniony warunek $a_n > 1000$?

- * D 4. Wykaż, korzystając z definicji, że ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = -100$ oraz $r = 2$, jest rozbieżny do ∞ .

*3.16. Obliczanie granic ciągów (1)

Przy obliczaniu granic ciągów będziemy korzystać z poniższego twierdzenia.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to:

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$, gdzie $c \in \mathbb{R}$

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$ granica sumy ciągów

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$ granica różnicy ciągów

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$ granica iloczynu ciągów

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$,
gdzie $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ granica ilorazu ciągów

Przykład 1

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{5n^2+3n-1}{n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+3n-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 5 + 0 - 0 = 5$$

Ćwiczenie 1

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{-2n^2+4}{n^2}$

b) $a_n = \frac{6n^3-4n^2+n}{2n^3}$

c) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2}$

Przykład 2

a) Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{3n+1}{4n+2}$.

W pierwszym kroku licznik i mianownik dzielimy przez n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3+\frac{1}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (4+\frac{2}{n})} = \frac{3+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{4+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4}$$

b) Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{2n^2-n+1}{5n^2+2n+2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-n+1}{5n^2+2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

Licznik i mianownik ułamka podzieliśmy przez n^2 .

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{n+3}{10n-6}$

b) $a_n = \frac{1-4n}{2n-5}$

c) $a_n = \frac{6-8n}{4-3n}$

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{-8n^2-3n+1}{2n^2-n-3}$

b) $a_n = \frac{3n^3-n^2+2}{4n^3-3n+3}$

c) $a_n = \frac{1-4n-7n^3}{2n^3+4}$

Przykład 3

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+1)(3n-1)}$.

Z każdego czynnika wyłączamy n przed nawias.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+1)(3n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{n^2(2+\frac{1}{n})(3-\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{(2+\frac{1}{n})(3-\frac{1}{n})} = \frac{1}{6}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{(6n-1)(2n+1)}{(n+2)(4n-1)}$

c) $a_n = \frac{(2n+1)^3}{(n+2)^3}$

e) $a_n = \frac{(n^2-2)(2n+1)}{(6n-4)(n^2+1)}$

b) $a_n = \frac{(2n+7)(4+5n)}{(3n+5)(4-3n)}$

d) $a_n = \frac{(n+1)^4}{(n+2)^4}$

f) $a_n = \frac{(3-2n^2)(n-6)}{(2n-5)^3}$

Przykład 4

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{3n^3+4}$.

Licznik ułamka jest sumą n wyrazów ciągu arytmetycznego, zatem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{3n^3+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{3n^3+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2}{6n^3+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{6+\frac{8}{n^3}} = \frac{0}{6} = 0$$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n-2n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+n+n^2}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+8+12+\dots+4n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$

Przykład 5

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n-2}{3 \cdot 4^n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n-2}{3 \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{2}{4^n}}{3} = \frac{1}{3}$$

Dzielimy licznik i mianownik ułamka przez 4^n .

Ćwiczenie 6

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{2^n+1}{2^n}$

c) $a_n = \frac{3^n+6}{3^n+1}$

e) $a_n = \frac{2^n+7^n}{4^n-3 \cdot 7^n}$

b) $a_n = \frac{2^n}{2+3 \cdot 2^n}$

d) $a_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$

f) $a_n = \frac{3^n-8^n}{4^n+5 \cdot 8^n}$

Przy wyznaczaniu niektórych granic można skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) i (c_n) spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla wszystkich (lub prawie wszystkich) $n \in \mathbf{N}_+$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Przykład 6

Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{10^n + 7^n}$.

Zauważmy, że dla $n \in \mathbf{N}_+$ prawdziwe są nierówności:

$$\sqrt[n]{10^n} < \sqrt[n]{10^n + 7^n} < \sqrt[n]{10^n + 10^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 10^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 10 = 10 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot 10 = 1 \cdot 10 = 10.$$

Zatem na podstawie twierdzenia o trzech ciągach: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n + 7^n} = 10$.

Ćwiczenie 7

Oblicz granicę.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6^n + 8^n}$ | c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 2^n + 4 \cdot 7^n}$ | e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7 + \sin n}$ |
| b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n - 2^n}$ | d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$ | f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 4^n - \cos n}$ |

Wskazówka. W podpunkcie b) zauważ, że $\sqrt[n]{4^n - 2^n} = 4 \sqrt[n]{1 - 2^{-n}}$.

Zadania

1. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- | | | |
|--|---------------------------------------|---|
| a) $a_n = \frac{\frac{1}{2}n+8}{2n+4}$ | c) $a_n = \frac{-6n^2+n-5}{1+n+3n^2}$ | e) $a_n = \frac{-4n^3+4n^2+2n-1}{-6n^4+4n^2+1}$ |
| b) $a_n = \frac{3n^2-12}{2n^2+3n}$ | d) $a_n = \frac{100n^2+1}{n^4+3n}$ | f) $a_n = \frac{8n^8+6n^6-4n^4}{n^5+n^7-n^9}$ |

2. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| a) $a_n = \frac{(n+2)^2}{(2n-1)^2}$ | c) $a_n = \frac{(n^2+1)(6-4n^2)}{(n-1)(n^3+1)}$ | e) $a_n = \frac{2n^3-n^2+2n+1}{(n+1)(n^2-n+1)}$ |
| b) $a_n = \frac{(2n+3)^3}{(n+3)^3}$ | d) $a_n = \frac{(n-1)(3n+1)^2}{(3n-1)(n^2+4)}$ | f) $a_n = \frac{(n+1)^2(2n-1)^2}{(n+2)^4}$ |

3. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

- | | | |
|------------------------------------|--|--|
| a) $a_n = \frac{2^n+5^n}{5^n-2^n}$ | b) $a_n = \frac{4^n+6 \cdot 9^n}{4^n-9^n}$ | c) $a_n = \frac{3 \cdot 6^n+4^{n+1}}{6^{n+2}-2 \cdot 4^n}$ |
|------------------------------------|--|--|

4. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+2n}{n^2+1}$

d) $a_n = \frac{1000n}{1+3+5+7+\dots+(2n+1)}$

b) $a_n = \frac{4n^2-3n+1}{1+2+3+\dots+n}$

e) $a_n = \frac{2+4+6+\dots+(2n+2)}{n^3+2n+5}$

c) $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n+(n+1)}{1+2+3+\dots+n}$

f) $a_n = \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{n+4}$

5. Korzystając z podanej obok informacji, oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

6. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \sqrt[n]{6 \cdot 5^n + 7 \cdot 3^n}$

c) $a_n = \sqrt[n]{4n + \frac{10}{n}}$

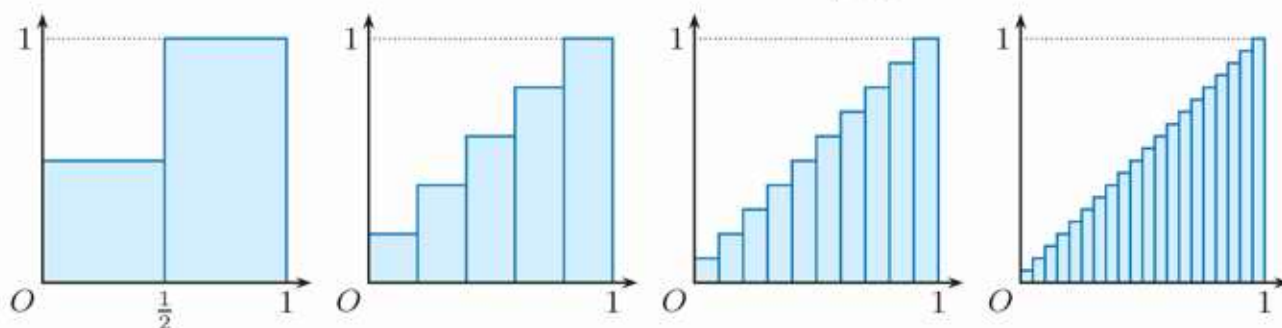
e) $a_n = \frac{100 \sin n}{\sqrt{n}}$

b) $a_n = \sqrt[n]{9^n - 3^n}$

d) $a_n = \sqrt[n]{6n + (-1)^n}$

f) $a_n = \frac{8 \cos n^2}{3n+1}$

7. Niech: $S_1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}$, $S_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3}$ i ogólnie: $S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n}$. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

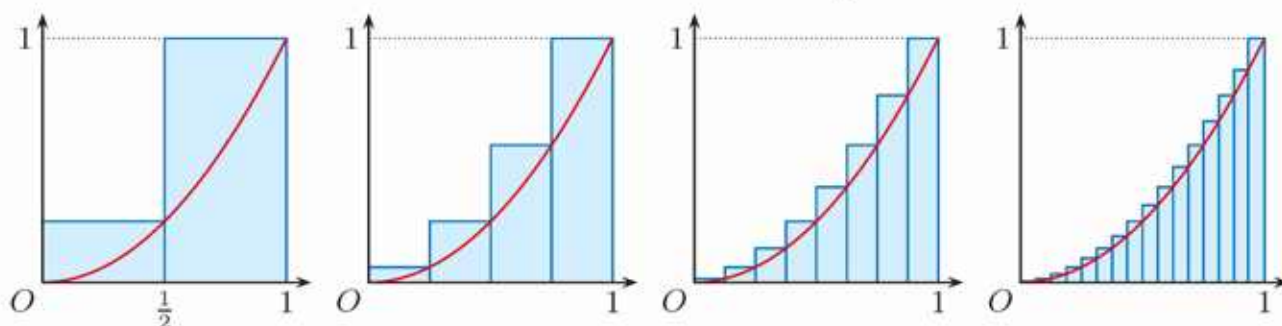


Na rysunkach przedstawiono interpretację geometryczną sum S_2 , S_5 , S_{10} i S_{20} .

8. Niech $S_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2$.

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, korzystając z tego, że:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Na rysunkach przedstawiono interpretację geometryczną sum S_2 , S_4 , S_8 i S_{16} .

*3.17. Obliczanie granic ciągów (2)

Dla ciągów mających granicę niewłaściwą ∞ zachodzą poniższe własności. Analogiczne własności zachodzą dla ciągów mających granicę $-\infty$.

- Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.
- Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b < 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$.

Ćwiczenie 1

Ile jest równa granica $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$, jeśli:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$?

Przykład 1

Oblicz granicę ciągu $a_n = n^4 - 100n^2 - 5n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 100n^2 - 5n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(1 - \frac{100}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right) = \infty$$

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (6n^3 - 2n^2 - 2022)$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-7n^4 + 10n^3 + 3)$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^4) \cdot 2^n$

Jeśli ciąg (b_n) o wyrazach niezerowych ma granicę $b \neq 0$ oraz:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, gdy $b > 0$, oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$, gdy $b < 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$, gdy $b > 0$, oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, gdy $b < 0$.

Przykład 2

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{3n^5 - 2n + 1}{2n^2 + 5}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 - 2n + 1}{2n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}} = \infty$$

Po podzieleniu licznika i mianownika przez n^2 otrzymujemy ułamek, którego licznik jest rozbieżny do ∞ , a mianownik ma granicę równą 2.

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - n^2 + 2}{3n^3 + 6}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{6 + n - n^2}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 5n - 2n^5}{8n^2 - 0,5n^3}$$

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, gdzie $a \in \mathbf{R}$, oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ (lub $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$), gdzie $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Przykład 3

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{10n^2 - 4n}{n^3 + 6n^2 + 5}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 - 4n}{n^3 + 6n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{4}{n}}{n + 6 + \frac{5}{n^2}} = 0$$

Po podzieleniu licznika i mianownika przez n^2 otrzymujemy ułamek, którego licznik ma granicę równą 10, a mianownik jest rozbieżny do ∞ .

Ćwiczenie 4

Oblicz granicę.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n + 8}{n^2 + 5n}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n^2 + 6n}{6n^4 + n}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 - 1}{n^2 - n^4}$$

W następnym przykładzie wyznaczany jest $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Przykład 4

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$.

$$\text{a) } a_n = n^3, b_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$$

$$\text{b) } a_n = n^3, b_n = \frac{1}{n^4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \cdot \frac{1}{n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{c) } a_n = n^3, b_n = \frac{2}{n^3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \cdot \frac{2}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$$

$$\text{d) } a_n = n, b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{granica ciągu } (a_n \cdot b_n) \text{ nie istnieje (uzasadnij).}$$

Zwróćmy uwagę na to, że gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, granica ciągu $(a_n \cdot b_n)$ może nie istnieć, natomiast gdy istnieje, nie możemy podać jej wartości bez szczegółowej analizy danego przykładu.

Mówimy wówczas, że mamy do czynienia z **symbolem nieoznaczonym** $[\infty \cdot 0]$.

Inne symbole nieoznaczone to między innymi: $[\infty - \infty]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ oraz $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, gdzie $a_n \geq 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \infty$.

Przykład 5

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+9} - \sqrt{n+4})$.

Mamy tu do czynienia z symbolem nieoznaczonym typu $[\infty - \infty]$. Granicę obliczamy, mnożąc i dzieląc różnicę pierwiastków przez ich sumę.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+9} - \sqrt{n+4}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+9} - \sqrt{n+4})(\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4})}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+9) - (n+4)}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+4}} = 0\end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

d) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

b) $a_n = \sqrt{4n-1} - \sqrt{3n+5}$

e) $a_n = \sqrt{2n^2+4} - \sqrt{n^2+5}$

c) $a_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$

f) $a_n = \sqrt{6n^2+n} - \sqrt{6n^2-n}$

Zadania

1. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = n^2 - 10n$

c) $a_n = n^3 - 2n + 1$

e) $a_n = -n^3(6n - n^2)$

b) $a_n = n^2 - n^3$

d) $a_n = 100n^3 - 0,1n^4$

f) $a_n = n(1-n)(2-n^2)$

2. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{2n^2+1}{n-8}$

d) $a_n = \frac{n^4+2n-5}{n^2-n+3}$

g) $a_n = \frac{(2n+3)(3n-1)^2}{(n-1)(1-n)}$

b) $a_n = \frac{n^3-1}{2-n^2}$

e) $a_n = \frac{3n-n^3+n^4}{9+n^2-6n^3}$

h) $a_n = \frac{(2-n)^3(4+n)}{(2+n)^2(6+n)}$

c) $a_n = -\frac{-n^4+100}{5-n^2}$

f) $a_n = \frac{2n^3-n^2-1}{(4n+1)^2}$

i) $a_n = \frac{(2n^3-1)(1-5n^2)}{(n^3+2)(1-2n)}$

3. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = 5^n - 3 \cdot 2^n$

c) $a_n = 2^n + 4 \cdot 7^n - 5^n$

e) $a_n = 4^n - 6 \cdot 2^n - 100$

b) $a_n = 4^n + 6^n - 8^n$

d) $a_n = -2^n + 8^n + 5^n$

f) $a_n = 3^n + 4^n - 12^n$

4. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{4^n-1}{2^n+6}$

b) $a_n = \frac{4-6^n}{4^n-6}$

c) $a_n = \frac{4^n-3 \cdot 8^n+2}{2^n+2}$

5. Oblicz granicę ciągu (a_n) .

$$\text{a) } a_n = \frac{\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+2} \quad \text{b) } a_n = \frac{\sqrt{n^3}+1}{1-2\sqrt{n}} \quad \text{c) } a_n = \frac{n^2-\sqrt{n}}{5+\sqrt{n}} \quad \text{d) } a_n = \frac{2n-\sqrt[3]{n^2}}{1+n}$$

6. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$\begin{aligned} \text{a) } a_n &= \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } n \leq 500 \\ \frac{6n^2+1}{2n+1} & \text{dla } n > 500 \end{cases} & \text{c) } a_n &= \begin{cases} \frac{2n}{1+n^2} & \text{dla } n \leq 1000 \\ \frac{1-n^2}{1+n} & \text{dla } n > 1000 \end{cases} \\ \text{b) } a_n &= \begin{cases} 5-n^2 & \text{dla } n \leq 100 \\ \frac{5n^2+1}{n+1} & \text{dla } n > 100 \end{cases} & \text{d) } a_n &= \begin{cases} \frac{3-n}{n^2+1} & \text{dla } n \leq 1000 \\ \frac{n^3+1}{1-n} & \text{dla } n > 1000 \end{cases} \end{aligned}$$

7. Oblicz granicę.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+1}) & \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n^2+3}) \\ \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n-3} - \sqrt{2n+10}) & \quad \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+2}) \\ \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n-1} - n) & \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2-n} - \sqrt{2n^2+3n+4}) \end{aligned}$$

* 8. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2n+3n+\dots+n^2}{\sqrt{4n^4+n+1}}$.

* 9. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rozbieżny do ∞ ?

$$\text{a) } a_n = \frac{kn}{|k-2|n+3} \quad \text{b) } a_n = \frac{(k^2-1)n^2-n-100}{kn}$$

*10. Wyznacz granicę ciągu (a_n) w zależności od parametru p .

$$\text{a) } a_n = \frac{(p+2)n^2+(p+1)n}{|p^2-4|n^2+6} \quad \text{b) } a_n = \frac{(4p^2-9)n^3-pn^2}{|2p-3|n^2+n}$$

Twierdzenie

- Jeśli $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.
- Jeśli $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

D 11. Korzystając z powyższego twierdzenia, uzasadnij, że:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \cos n) &= \infty, & \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \sin 2n) &= \infty, \\ \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n} + \sin n^2) &= \infty, & \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{tg} \frac{n\pi}{3} - 2n) &= -\infty. \end{aligned}$$

D*12. Niech a_n będzie sumą odwrotności liczb naturalnych od 1 do 2^n , czyli:
 $a_1 = 1 + \frac{1}{2}$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$, ...
 Uzasadnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

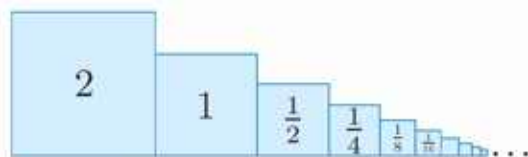
*3.18. Szereg geometryczny

Przykład 1

Rozpatrzmy ciąg geometryczny o wyrazach początkowych: $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$. Iloraz tego ciągu $q = \frac{1}{2}$, więc suma jego n początkowych wyrazów dana jest wzorem:

$$S_n = \frac{2(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 4(1 - (\frac{1}{2})^n)$$

Czy można obliczyć sumę $S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ wszystkich wyrazów tego ciągu? Ponieważ $S_n \rightarrow 4$ przy $n \rightarrow \infty$ (gdyż $(\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$), przyjmujemy, że suma $S = 4$.



Suma pól wszystkich kwadratów jest równa 4.

Definicja

Wyrażenie $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots$ nazywamy **szeregiem geometrycznym** o wyrazach: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$ i ilorazie q .

Sumę $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$ nazywamy n -tą **sumą częściową** tego szeregu. I tak:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_1q, \quad S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2, \dots$$

Jeśli istnieje granica właściwa $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, to granicę tę nazywamy **sumą szeregu**, szereg nazywamy **zbieżnym** i piszemy: $S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$

W przeciwnym wypadku szereg nazywamy **rozbieżnym**.

Przykład 2

Wyznacz n -tą sumę częściową szeregu geometrycznego $12 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots$, a następnie oblicz sumę tego szeregu.

Pierwszy wyraz szeregu $a_1 = 12$, a jego iloraz $q = \frac{1}{3}$. Zatem n -ta suma częściowa wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{12(1 - (\frac{1}{3})^n)}{1 - \frac{1}{3}} = 18(1 - (\frac{1}{3})^n)$$

Obliczamy sumę szeregu:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 18(1 - (\frac{1}{3})^n) = 18$$

Ćwiczenie 1

Wyznacz n -tą sumę częściową szeregu geometrycznego, a następnie oblicz sumę tego szeregu.

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

b) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots$

Twierdzenie

Szereg geometryczny o ilorazie $q \in (-1; 1)$ jest zbieżny. Jeżeli a_1 jest pierwszym wyrazem szeregu, to suma szeregu wyraża się wzorem:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Dowód. Dla $|q| < 1$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Zatem:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

Przykład 3

Oblicz sumę szeregu geometrycznego $3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \dots$

Mamy $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{5} \in (-1; 1)$, zatem suma $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{5}} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Ćwiczenie 2

Danych jest nieskończenie wiele odcinków. Pierwszy z nich ma długość $\frac{1}{2}$, a każdy następny jest 2 razy krótszy od poprzedniego. Ile jest równa suma długości wszystkich tych odcinków?



Ćwiczenie 3

Oblicz sumę szeregu geometrycznego $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$

a) $a_1 = 100$, $q = 0,9$ b) $a_1 = 12$, $q = \frac{1}{3}$ c) $a_1 = 2 - \sqrt{2}$, $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Przykład 4

Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) $0,(61) = 0,616161\dots = 0,61 + 0,0061 + 0,000061 + \dots =$

$$= \frac{61}{100} + \frac{61}{100^2} + \frac{61}{100^3} + \dots = \frac{\frac{61}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{61}{99}$$

b) $0,5(027) = 0,5027027027\dots =$

$$= 0,5 + 0,0027 + 0,0000027 + 0,000000027 + \dots =$$

$$= 0,5 + \frac{\frac{27}{10\,000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1}{2} + \frac{27}{9990} = \frac{1}{2} + \frac{1}{370} = \frac{93}{185}$$

Ćwiczenie 4

Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.

a) $0,7777\dots$ b) $0,343434\dots$ c) $0,1121212\dots$ d) $0,0123123123\dots$

D Przykład 5

Uzasadnij, że szereg geometryczny $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots$ jest rozbieżny.

Iloraz szeregu $q = \frac{3}{2}$. Wyznaczamy n -tą sumę częściową:

$$S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}} = -2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Badamy granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) = \infty$$

Zatem szereg jest rozbieżny do ∞ .

Twierdzenie

Szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 \neq 0$ i ilorazie q jest:

- zbieżny, gdy $|q| < 1$,
- rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$.

Uwaga. Jeśli $a_1 = 0$, to szereg ma postać $0 + 0 + 0 + \dots$. Jego suma jest równa 0.

Ćwiczenie 5

Dla jakich wartości x szereg geometryczny jest zbieżny?

- a) $x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \dots$
- b) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$
- c) $1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{27x^3} + \dots$
- d) $1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)^3} + \dots$

Przykład 6

Rozwiąż równanie: $4 + 4(x-1) + 4(x-1)^2 + \dots = x + 3$.

Lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie $q = x - 1$. Szereg ten jest zbieżny, gdy $|x - 1| < 1$, czyli dla $x \in (0; 2)$. Korzystamy ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{4}{1 - (x-1)} &= x + 3 \quad / \cdot (2 - x) \\ 4 &= -x^2 - x + 6 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ x &= -2 \text{ lub } x = 1\end{aligned}$$

$-2 \notin (0; 2)$, zatem rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

- a) $x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots = 2x - 1$
- b) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \dots = 1 + \frac{1}{x}$

Zadania

1. Sprawdź, czy szereg geometryczny jest zbieżny. Jeśli jest, oblicz jego sumę.
 - a) $10 + 9 + \frac{81}{10} + \frac{729}{100} + \dots$
 - b) $-125 - 25 - 5 - 1 - \dots$
 - c) $2 - 4 + 8 - 16 + \dots$
 - d) $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \dots$
 - e) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{8} + \dots$
 - f) $-2 + \frac{4}{5} - \frac{8}{25} + \frac{16}{125} - \dots$
2. Sprawdź, czy szereg geometryczny o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q jest zbieżny. Jeśli jest, oblicz jego sumę.
 - a) $a_1 = \sqrt{2} - 1, q = \sqrt{2} + 1$
 - b) $a_1 = \sqrt{2} + 1, q = \sqrt{2} - 1$
3. Uzupełnij brakującą informację dotyczącą szeregu geometrycznego zbieżnego o pierwszym wyrazie a_1 , ilorazie q i sumie S .
 - a) $a_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}, q = 1 - \sqrt{3}, S = \boxed{?}$
 - b) $a_1 = -\frac{1}{5}, q = \boxed{?}, S = -\frac{2}{5}$
 - c) $a_1 = \boxed{?}, q = \frac{1}{100}, S = 100$
 - d) $a_1 = -2\sqrt{2}, q = \boxed{?}, S = -3\sqrt{2}$
4. Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły.
 - a) $0,(1)$
 - b) $0,(9)$
 - c) $0,0(2)$
 - d) $1,3(6)$
 - e) $0,(60)$
 - f) $1,8(81)$
 - g) $-5,(45)$
 - h) $-1,(1001)$
5. Suma pierwszych trzech wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 56, a suma wszystkich jego wyrazów jest równa 64. Oblicz cztery początkowe wyrazy tego ciągu.
6. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa $\frac{4}{3}$, a iloczyn trzech początkowych jego wyrazów jest równy -1 . Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.
7.
 - a) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 9, a suma jego wyrazów o numerach parzystych jest równa $\frac{9}{4}$. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.
 - b) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 6, a suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 12. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.
8.
 - a) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie $q = -\frac{1}{2}$ i pierwszym wyrazie różnym od zera jest dwukrotnie mniejsza od sumy kwadratów jego wyrazów. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.
 - b) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 20, a suma kwadratów jego wyrazów jest równa 240. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

9. Dla jakich wartości x szereg geometryczny jest zbieżny?

a) $1 + (2x - 3) + (2x - 3)^2 + \dots$ b) $1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \dots$

10. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

a) $x + 1 + (x + 1)^2 + (x + 1)^3 + \dots = 8x^2 - 1$

b) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \dots = x^2 + x + 1$

11. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots$

c) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots$

b) $f(x) = -x + x^2 - x^3 + \dots$

d) $f(x) = -1 + \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} + \dots$

12. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres.

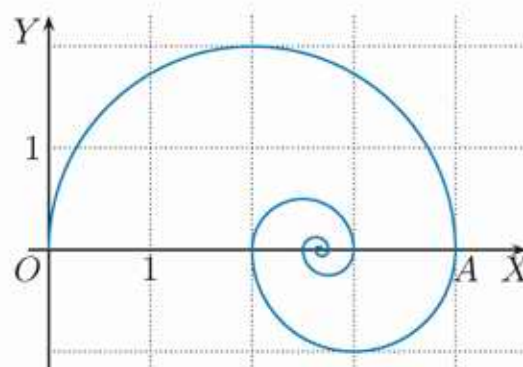
a) $f(x) = -1 + \frac{x-1}{x-2} - \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 + \dots$

b) $f(x) = -1 + \frac{x-4}{x-3} - \left(\frac{x-4}{x-3}\right)^2 + \dots$

13. Spirala (rysunek obok) składa się z półokręgów o promieniach $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

a) Oblicz długość spirali.

b) Wyznacz współrzędne takiego punktu P , że spirala przecina każdy z odcinków OP i PA w nieskończenie wielu punktach.



Rozpatruje się również szeregi inne niż geometryczne. Na przykład szereg odwrotności liczb naturalnych zwany szeregiem harmonicznym:

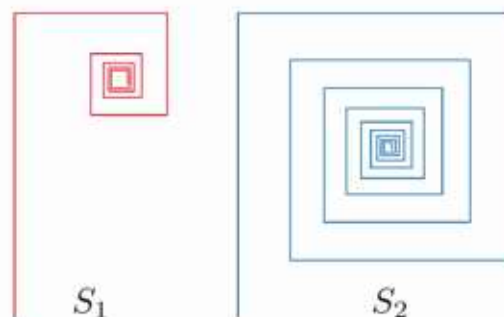
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

jest rozbieżny do ∞ , podczas gdy szereg harmoniczny rzędu 2:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

jest zbieżny i jego suma jest równa $\frac{\pi^2}{6}$.

14. Na rysunku obok przedstawiono początkowe fragmenty spiral. Spirala S_1 składająca się z odcinków o długości $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ma nieskończoną długość. Oblicz długość spirali S_2 składającej się z odcinków o długości $1, 0,9, 0,9^2, 0,9^3, \dots$



3.19. Zagadnienia uzupełniające

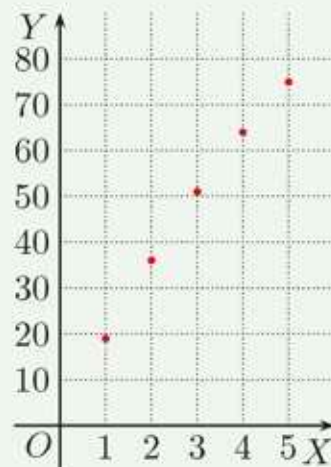
■ Ciągi ograniczone

Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym z góry**, jeśli istnieje liczba M taka, że $a_n \leq M$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 1

Rozpatrzmy ciąg $a_n = 20n - n^2$. Początkowe wyrazy tego ciągu (wykres obok) to: 19, 36, 51, 64, 75, ... Czy ciąg ten może przyjmować dowolnie duże wartości?

Korzystamy ze wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = 20x - x^2$ i otrzymujemy $y_w = 100$. Ramiona paraboli są skierowane w dół, zatem $a_n \leq 100$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry przez liczbę 100.



Zauważ, że w definicji nie wymagamy wskazania najmniejszej liczby ograniczającej dany ciąg z góry. W przykładzie ciąg (a_n) jest ograniczony z góry również przez liczby: 105, 110, 200 itp.

- Wymień kilka liczb ograniczających ciąg (a_n) z góry.
a) $a_n = 10n - n^2$ b) $a_n = 100n - 2n^2$ c) $a_n = -n^2 + 14n - 40$
- Podaj definicję ciągu ograniczonego z dołu.
- Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Czy ciąg ten jest ograniczony z dołu? Czy jest ograniczony z góry?
a) $a_n = 2n^2 - 10$ b) $a_n = \frac{1}{2n^2} - 4$ c) $a_n = n \cos n\pi$

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **ograniczonym**, jeśli jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry, czyli istnieją liczby m i M takie, że $m \leq a_n \leq M$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

- D** 4. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ograniczony.
- a) $a_n = 5 \sin n + \frac{10}{n}$ b) $a_n = \frac{6}{2^n} + 2 \cos n^2$ c) $a_n = \frac{1000}{n^2} + \frac{500}{n} + 5$

-  5. Uzasadnij, że ciąg rosnący jest ograniczony z dołu, a ciąg malejący – ograniczony z góry.

Jeśli ciąg rosnący jest ograniczony z góry, to ciąg ten ma granicę. Podobnie ciąg malejący ograniczony z dołu. Twierdzenie to zwykle formułuje się krótko:

Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Można wykazać, że ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony, zatem jest zbieżny. Jego granicę oznaczamy literą e . Jest to liczba niewymierna, jej przybliżona wartość jest równa 2,718281828.

Można też udowodnić, że liczba e jest sumą szeregu:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots$$

-  6. a) Oblicz $\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{50}$, $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$, $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}$.
b) Oblicz przybliżoną wartość liczby e z dokładnością do piątego miejsca po przecinku, przyjmując, że:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$$

■ Indukcja matematyczna

O prawdziwości twierdzenia dotyczącego liczb naturalnych nie możemy wnioskować na podstawie sprawdzenia pewnej (nawet bardzo dużej) liczby przykładów. Twierdzeń dotyczących liczb naturalnych dowodzimy, korzystając z twierdzenia zwanego **indukcją matematyczną**.

Zasada indukcji matematycznej

Jeżeli własność dotycząca liczb naturalnych spełnia warunki:

1. jest prawdziwa dla $n = 1$,
2. dla każdej liczby naturalnej $k \geq 1$ zachodzi wynikanie: jeśli własność jest prawdziwa dla liczby k , to jest prawdziwa dla liczby $k + 1$,
to własność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$.

Warunek 1. nazywamy krokiem początkowym, warunek 2. nazywamy krokiem indukcyjnym.

D Przykład 2

Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że suma n początkowych liczb nieparzystych wyraża się wzorem:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Dowód indukcyjny

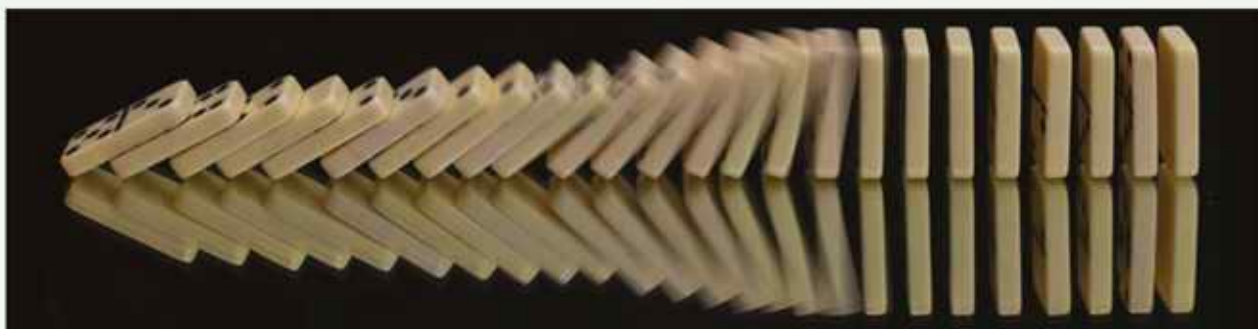
1. Sprawdzamy prawdziwość wzoru dla $n = 1$:
lewa strona $L = 1$, prawa strona $P = 1^2$, zatem wzór jest prawdziwy.
2. Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla liczby naturalnej $k \geq 1$ (założenie to nazywamy **założeniem indukcyjnym**), czyli:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

Korzystając z tego założenia, wykażemy, że wzór jest prawdziwy dla liczby $k + 1$:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)}_{k^2} + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Sprawdziliśmy, że wzór jest prawdziwy dla $n = 1$, a następnie wykazaliśmy, że z prawdziwości wzoru dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 1$ wynika jego prawdziwość dla $k + 1$. Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.



Dobłą ilustracją zasady indukcji matematycznej jest domino. Kiedy mamy pewność, że wszystkie kamienie się przewrócą? Przy spełnieniu dwóch warunków:

1. musi się przewrócić pierwszy kamień,
2. przewrócenie któregośkolwiek kamienia (k -tego) pociąga za sobą przewrócenie następnego ($(k + 1)$ -szego).

- D 7. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi poniższa równość.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$

d) $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

e) $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

c) $3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2)$

f) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$

D Przykład 3

Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $4^n + 5$ jest podzielna przez 3.

Dowód indukcyjny

1. Sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla $n = 0$: $4^0 + 5 = 6$ oraz $3|6$, zatem twierdzenie jest prawdziwe.
2. Zakładamy, że dla liczby naturalnej k , liczba $4^k + 5$ jest podzielna przez 3. Pokażemy, że wtedy liczba $4^{k+1} + 5$ jest podzielna przez 3. Z założenia, że liczba $4^k + 5$ jest podzielna przez 3, wynika istnienie liczby całkowitej a takiej, że $4^k + 5 = 3a$.

Stąd $4^k = 3a - 5$, czyli:

$$4^{k+1} + 5 = 4^k \cdot 4 + 5 = (3a - 5) \cdot 4 + 5 = 12a - 15 = 3(4a - 5)$$

Zatem liczba $4^{k+1} + 5$ jest również podzielna przez 3.

Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $4^n + 5$ jest podzielna przez 3.

D 8. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że:

- | | |
|--------------------|-----------------------------------|
| a) $6 n^3 - n$, | e) $12 10^n - 4$ dla $n \geq 2$, |
| b) $3 n^3 + 2n$, | f) $9 4^n + 15n - 1$, |
| c) $6 n^3 + 11n$, | g) $9 7^n + 3n - 1$, |
| *d) $30 n^5 - n$, | h) $6 10^n + 4^n - 2$. |

D 9. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnij, że suma kątów wewnętrznych n -kąta wypukłego jest równa $(n - 2) \cdot 180^\circ$.**D 10.** Udowodnij twierdzenie, stosując zasadę indukcji matematycznej.

- a) Każdy n -kąt wypukły ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.
- b) n prostych dzieli płaszczyznę na co najwyżej 2^n części.

D 11. Odgadnij wzór ogólny ciągu (a_n) . Postawioną hipotezę udowodnij, stosując zasadę indukcji matematycznej.

- | | |
|--|--|
| a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \quad n \geq 1 \end{cases}$ | c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$ |
| b) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1 \end{cases}$ |



Zestawy powtórzeniowe

■ Zestaw I

1. Oblicz $a_{10} - b_8$.

a) $a_n = \frac{8-n}{4}$, $b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{2}$ b) $a_n = \frac{n^2+5}{n}$, $b_n = \frac{5n-8}{n^2}$

D 2. Oblicz wyrazy a_1 , a_2 , a_3 i a_8 ciągu $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Uzasadnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.

3. Czy ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym? Określ jego monotoniczność.

a) $b_n = 4 - \frac{1}{2}n$ b) $b_n = \frac{n+3}{n}$ c) $b_n = \frac{9-4n^2}{2n+3}$

4. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $a_2 = 2$, $a_4 = 6$ b) $a_2 = 0$, $a_5 = 9$ c) $a_4 = 2$, $a_{10} = -10$

5. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_1 \cdot a_2 = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_4 - a_2 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = 6 \\ a_2 + a_4 = 8 \end{cases}$

6. Oblicz ósmy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $a_2 = -10$, $a_5 = -40$ b) $a_7 + a_9 = 10$ c) $a_1 = 1$, $a_9 - a_6 = 6$

7. Oblicz sumę S_{12} ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $a_1 = 2$, $a_{10} = 29$ c) $a_2 = 5$, $a_{10} = 21$ e) $a_1 = 16$, $S_4 = 52$
b) $a_1 = 3$, $r = 2$ d) $a_2 = -8$, $r = 3$ f) $a_3 = -4$, $S_{10} = -15$

8. Oblicz sumę S_{100} ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{100} = \frac{2}{3}$ c) $a_1 = 5$, $a_{99} + a_{101} = 150$
b) $a_{10} = -1$, $a_{100} = -11$ d) $a_2 = b^2$, $a_3 = (b+1)^2$, $a_4 - a_2 = 2$

9. Lewa strona równania jest sumą kilku początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

a) $3 + 5 + 7 + \dots + x = 48$ c) $2 + 7 + 12 + \dots + x = 156$
b) $8 + 6 + 4 + \dots + x = -220$ d) $-7 - 3 + 1 + \dots + x = 110$

10. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 5, które:

a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe.

11. Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym? Określ jego monotoniczność.

a) $b_n = 2^{-n}$

b) $b_n = 3 \cdot 5^n$

c) $b_n = 2^{3n-1}$

12. Oblicz wyrazy od czwartego do ósmego ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_1 = 3, q = 2$

b) $a_1 = -4, q = \frac{1}{2}$

c) $a_2 = -25, a_3 = 5$

13. Oblicz wyrazy a_3 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_6 = 100, q = 10$

c) $a_4 = 1, a_3 \cdot a_4 = 3$

b) $a_2 = 4, a_7 = 128$

d) $a_1 + a_3 = 10, a_3 = -8a_6$

14. Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_1 = 3, q = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = 1, a_2 + a_3 = 20$

b) $a_1 = -10, q = -\frac{1}{2}$

d) $a_1 = -4, S_3 = -12$

15. Dla jakich wartości x liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a dla jakich kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

a) $a = x - 9, b = x - 6, c = 2x - 4$

b) $a = -6x, b = 3x, c = x^2$

16. Oblicz $2a_5 - b_7$.

a) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = (-2)^n \cdot a_n \text{ dla } n \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_{n+1} = b_n - (-1)^n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 \text{ dla } n \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

17. Podaj rekurencyjne określenie ciągu (a_n) .

a) $a_n = n^2 - 3n + 1$

c) $a_n = -\frac{5}{2^n}$

b) $a_n = 4 + \frac{1}{n}$

d) $a_n = \log n$



18. Do banku wpłacono 2000 zł na dwa lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeżeli odsetki są kapitalizowane:

a) co pół roku,

b) co kwartał,

c) co miesiąc?



19. Kapitał w wysokości 800 zł został złożony w banku oferującym kapitalizację miesięczną. Oblicz wysokość kapitału po roku, jeśli przez sześć pierwszych miesięcy roczna stopa procentowa wynosiła:

a) 6%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 3%,

b) 3%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 6%.



■ Zestaw II

1. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{-n+2}{3}$ b) $a_n = \frac{2n+1}{2n+3}$ c) $a_n = \frac{2n^2+1}{2n^2}$ d) $a_n = \frac{5-3n}{2n+1}$

2. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 1 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 - a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

D 3. Wykaż, że dla każdej wartości parametru t ciąg (a_n) jest rosnący.

a) $\begin{cases} a_1 = t \\ a_{n+1} = a_n(a_n + 1) + 3 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = t \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2 + 1 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

4. S_n jest sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny?

a) $S_n = 3n^2 + 3n$ b) $S_n = n^3 + 7$

D 5. Uzasadnij, że jeśli liczby a, b, c tworzą jednocześnie ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny, to jest to ciąg stały.

6. a) Trzy liczby, których suma jest równa 6, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do ostatniej z nich dodamy 1, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

b) Trzy liczby, których suma jest równa 7, tworzą ciąg geometryczny. Jeśli od ostatniej z nich odejmiemy 1, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

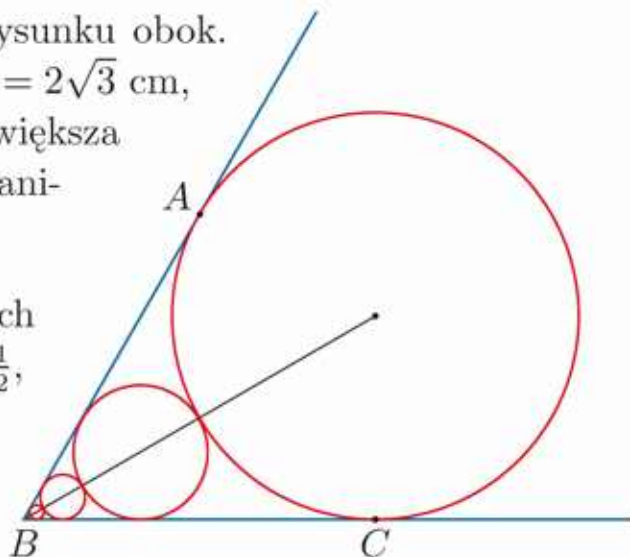
7. Suma trzech wyrazów b_1, b_2, b_3 ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 6. Jeśli od ostatniego wyrazu odejmiemy 18, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Oblicz b_1, b_2, b_3 .

8. a) Dany jest skończony ciąg geometryczny o parzystej liczbie wyrazów. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a suma wszystkich wyrazów jest cztery razy większa od sumy wyrazów o numerach parzystych. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

b) Stosunek sumy dziewięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy trzech początkowych wyrazów wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz siódmy wyraz tego ciągu, jeśli wiadomo, że pierwszy wyraz jest równy 12.



- D 9.** Cztery okręgi położone są jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli $\angle ABC = 60^\circ$ i $|AB| = 2\sqrt{3}$ cm, to suma długości tych okręgów jest większa od 18,6 cm. Oblicz sumę pól kół ograniczonych tymi okręgami.



- 10.** Pola pięciu trójkątów równobocznych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$, a suma tych pól jest równa $31\sqrt{3}$. Oblicz obwód największego spośród tych trójkątów.

- 11.** Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = -\frac{1}{2}n^4 + 10n^3 + 102n$

e) $a_n = \frac{0,3n+6}{\sqrt{n}+3}$

b) $a_n = \frac{2n^2+4n}{2n^3+n^2-6n}$

f) $a_n = \frac{3n^2+5n+6}{6n^2+4n+3}$

c) $a_n = \frac{(4-n^2)(4+n^2)}{2n^3-n^2+1}$

g) $a_n = \frac{(1-n)(6-n^2)}{(2+n)(8-n^2)}$

d) $a_n = \frac{\sqrt{6n}-n}{\sqrt{2n}+n}$

h) $a_n = \frac{3+n^3}{\sqrt{n^4+4}}$

- 12.** Oblicz granicę ciągu (a_n) .

a) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$

b) $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$

- 13.** Dla jakich wartości parametru b ciąg (a_n) ma granicę równą 2?

a) $a_n = \frac{bn}{(b+1)n+3}$

b) $a_n = \frac{b^2n}{(b+4)n+b}$

- 14.** Oblicz sumę szeregu geometrycznego.

a) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \dots$

b) $(1 + \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}+3}{3} + \frac{1+\sqrt{3}}{3} + \dots$

- 15.** Przedstaw ułamek okresowy w postaci ułamka zwykłego.

a) $0,(12)$

b) $0,(342)$

c) $2,4(23)$

d) $3,(9)$

- 16.** Wyznacz dziedzinę i wzór funkcji f oraz naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = 1 + \frac{x}{1+x} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \dots$

b) $f(x) = 1 + \frac{x-2}{x-3} + \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 + \dots$

- 17.** Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

a) $\frac{2}{3} + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^3 + \dots = 2$

c) $1 + 2x + 4x^2 + \dots = \frac{1}{1-2x}$

b) $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} + \dots = \frac{16}{5}$

d) $1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+5n}{2n^2+1}$

**Przykład 1**

Rozwiąż równanie:

$$1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots = 2 + 2 \sin x, \text{ gdzie } x \in (0; 2\pi)$$

Lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = \sin x$.

Szereg ten jest zbieżny, gdy $|\sin x| < 1$, czyli dla $x \in (0; 2\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$.

Wówczas równanie przybiera postać:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\sin x} &= 2 + 2 \sin x / \cdot (1 - \sin x) \\ 2 - 2 \sin^2 x &= 1 \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2} \\ \sin x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Odpowiedź: } x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\}$$

Przykład 2

Rozwiąż równanie:

$$2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^5 x + \dots = \sqrt{3}, \text{ gdzie } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 2 \operatorname{tg} x$ i ilorazie $q = \operatorname{tg}^2 x$.

Szereg ten jest zbieżny, gdy:

$$\begin{aligned} |\operatorname{tg}^2 x| &< 1 \\ -1 &< \operatorname{tg} x < 1 \\ x &\in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Wówczas równanie przybiera postać:

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} &= \sqrt{3} / \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 x) \\ \sqrt{3} - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x &= 2 \operatorname{tg} x \\ \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} &= 0 \end{aligned}$$

Podstawiamy $t = \operatorname{tg} x$ i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3} &= 0, \sqrt{\Delta} = 4 \\ t &= -\sqrt{3} \text{ lub } t = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Wracamy do niewiadomej x : $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pierwsze rozwiązanie odrzucamy, gdyż nie spełnia warunku $|\operatorname{tg}^2 x| < 1$.

$$\text{Odpowiedź: } x = \frac{\pi}{6}$$



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

- Liczba 6 jest piątym wyrazem ciągu:
A. $a_n = \frac{n^2-7}{n+1}$, B. $a_n = \frac{n^2+9}{n+1}$, C. $a_n = \frac{n^2+4n}{n+2}$, D. $a_n = \frac{2n^2-8}{n+2}$.
- Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 7n - n^2$. Największy wyraz tego ciągu jest równy:
A. 16, B. 12, C. 10, D. 6.
- Ciągiem malejącym jest ciąg:
A. $a_n = n^2 - 9n$, C. $a_n = \frac{2n-1}{3n-2}$,
B. $a_n = -n^2 + 3n$, D. $a_n = \frac{3n+4}{2n+3}$.
- Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \sqrt{2}n - n$. Suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $66\sqrt{2} - 66$ dla n równego:
A. 13, B. 11, C. 9, D. 6.
- Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1. Suma wyrazów ciągu (a_n) większych od 10 i mniejszych od 100 jest równa:
A. 1595, B. 1485, C. 1375, D. 1265.
- Ciąg (a_n) jest niemonotonicznym ciągiem geometrycznym takim, że $a_2^2 = 9$ oraz $a_4 = 27$. Suma piątego i szóstego wyrazu tego ciągu jest równa:
A. 162, B. 243, C. 324, D. 543.
- Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym $a_2 = 2$ i $a_5 = 0,25$. Suma S_5 tego ciągu jest równa:
A. 6,25, B. 6,5, C. 7,75, D. 8,25.
- Liczba $\sqrt{2}$ jest granicą ciągu:
A. $a_n = \frac{\sqrt{2}n^2-4}{n+1}$, C. $a_n = \frac{2n-\sqrt{8}n^2}{1-2n^2}$,
B. $a_n = \frac{\sqrt{2}n-6}{n^2+3}$, D. $a_n = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}n^2}{n^2+1}$.
- Ciąg $a_n = \frac{bn-6}{(1-b)n+3}$ ma granicę niewłaściwą ∞ dla b równego:
A. -2, B. 0, C. 1, D. 2.
- Suma szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym $1 - \sqrt{3}$ i ilorazie równym $2 - \sqrt{3}$ wynosi:
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$, B. -1, C. $\sqrt{3}$, D. $\sqrt{3} + 1$.

**Zadania krótkiej odpowiedzi****Zadanie 1 (2 pkt)**

Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = -\frac{n+3}{n+2}$.

D Zadanie 2 (2 pkt)

Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 - n + 3 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Zadanie 3 (2 pkt)

Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a iloraz 4. Z ilu wyrazów składa się ten ciąg?

Zadania rozszerzonej odpowiedzi**Zadanie 4 (4 pkt)**

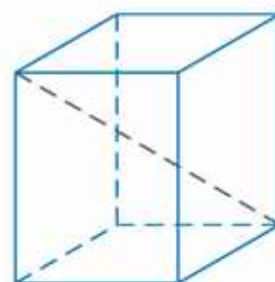
Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 24. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że tworzą one ciąg arytmetyczny.

Zadanie 5 (4 pkt)

Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów jest równa 56. Wyznacz te liczby.

Zadanie 6 (5 pkt)

Długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny. Przekątna prostopadłościanu ma długość $\sqrt{84}$ cm, a jego objętość jest równa 64 cm^3 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

**Zadanie 7 (5 pkt)**

Suma pięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego jest równa 30, a iloczyn drugiego i czwartego wyrazu jest równy 11. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać sumę większą od 100?

Zadanie 8 (4 pkt)

Suma trzech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego jest równa 13. Drugi wyraz jest o 5 mniejszy od różnicy między trzecim i pierwszym wyrazem. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.



W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Dwa środkowe wyrazy ciągu geometrycznego składającego się z czternastu wyrazów są równe kolejno 6 i $3\sqrt{6}$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz czwarty wyraz ciągu (a_n) . Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \frac{(1-a_n)^2}{a_{n-1}} & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Zadanie 3 (2 pkt)

Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{3n^2 + 6n} - \sqrt{3n^2 + n + 6}$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4 (2 pkt)

Oblicz sumę szeregu geometrycznego $1 + \sin \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \dots$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku otrzymanej liczby.

Zadanie 5 (4 pkt)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach całkowitych. Suma wyrazów pierwszego, drugiego i piątego jest równa 27, a liczby $a_1 - 1$, $a_2 - 1$ i $a_5 - 4$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .

Zadanie 6 (4 pkt)

Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 7. Jeśli od ostatniej z nich odejmiemy 1, a pierwsze dwie pozostawimy bez zmian, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

Zadanie 7 (4 pkt)

Iloczyn trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy 2^{12} , a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 64. Oblicz sumę jego wyrazów o numerach nieparzystych.

Zadanie 8 (5 pkt)

Znajdź liczby $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ spełniające nierówność:

$$1 - \cos 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x + \dots \geq \frac{2}{3}$$